Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 1. Unendliche Reihen

1.1

Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen:

(a) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$

(b) $1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots$

(c) $1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4,$
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

(d) $0, \sin\frac{\pi}{7}, \sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{3\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \ldots$

(e) $0, \sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5, \ldots.$

Lösungsweg

(a)

In jedem noch so kleinen Intervall um die Punkte 1 und 0 befinden sich beliebig viele Folgenglieder:

(1) die Hälfte alle Folgenglieder ist sogar gleich 1

(0) Zu einem gegebenen Intervall ($-\epsilon,\epsilon$) sei n=[$1/\epsilon$] (das größte Ganze von $1/\epsilon$); dann sind alle weiteren geraden Folgenglieder ab 1/n sicher in diesem Intervall. Unabhängig davon, wie klein ϵ ist, sind das immer (abzählbar) unendlich viele.

(d)

Das allgemeine Folgenglied ist $a_n = \sin \frac{n\pi}{7}$; da der Sinus periodisch ist, ist

$$\sin \frac{n\pi}{7} = \sin \frac{(n+14)\pi}{7}$$

Ebenso ist auch (wegen der Symmetrie der Sinusfunktion zu x=π/2)

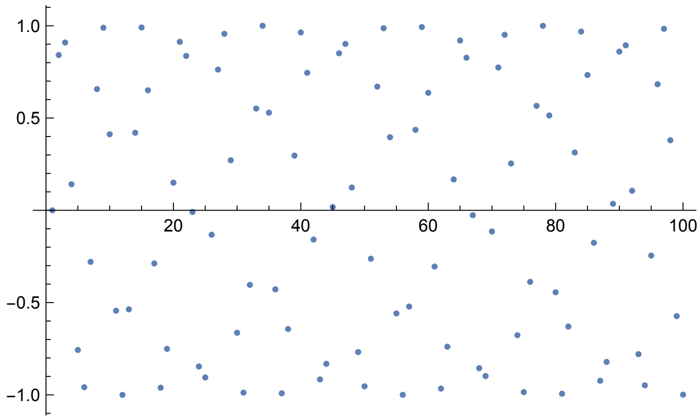
$$\sin 0 = \sin \pi,$$
$$\sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{6\pi}{7},$$
$$\sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{5\pi}{7},$$
$$\sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7},$$
$$\sin \frac{8\pi}{7} = \sin \frac{13\pi}{7},$$
$$\sin \frac{9\pi}{7} = \sin \frac{12\pi}{7},$$
$$\sin \frac{10\pi}{7} = \sin \frac{11\pi}{7}$$

Genau das sind die Häufungspunkte, da jeweils ein Siebentel aller (unendlich vieler) Folgenglieder gleich einem dieser Werten ist.

(e)

Die Folge $a_n =$
$\sin n$ ist nicht periodisch. Wir wollen uns die ersten 100 Glieder graphisch veranschaulichen :

In[∘]:=
```
ListPlot[Table[Sin[n], {n, 0, 99}]]
```

Out[∘]=


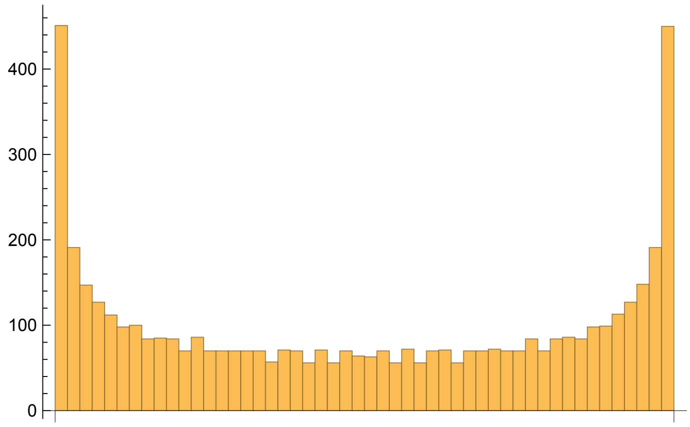
Wir wollen das Intervall [-1,1] in 50 Teile unterteilen, und dann die ersten 5000 Glieder der Folge ja nach ihrem Wert im entsprechenden Intervall zählen. So entsteht ein Histogramm, das wir nun zeichnen.

In[∘]:=
```
Hist = Table[0, {i, 1, 50}];
Do[(an = Sin[n]; i = Floor[(an + 1) * 25] + 1;
      Hist[[i]] = Hist[[i]] + 1), {n, 1, 5000}];
```

(Jeder Wert an wurde geeignet skaliert, um die Position im Histogramm zu bestimmen. Floor[x] berechnet die größte ganze Zahl von x.)

In[∘]:=
```
BarChart[Hist]
```

Out[∘]=



In jedem Teilintervall kommen also zwar verschieden viele, aber doch im Vergleich zur Gesamtanzahl ein fester Anteil (ungleich 0) von Folgengliedern vor. Dieses Bild ändert sich nicht, wenn man die Intervallteile kleiner und die betrachteten Zahl der Folgenglieder größer macht. Damit sind alle Punkte des Intervalls [-1,1] Häufungspunkte der Folge!

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.2

Untersuchen Sie die Folgen (b_n) sowohl analytisch als auch mit Hilfe eines Computerprogramms

(a) $b_n = 3 - \frac{1}{n}$,

(b) $b_n = \frac{5\,n}{1 - 10\,n}$,

(c) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Lösungsweg

(a)

$$b_n = 3 - \frac{1}{n}$$

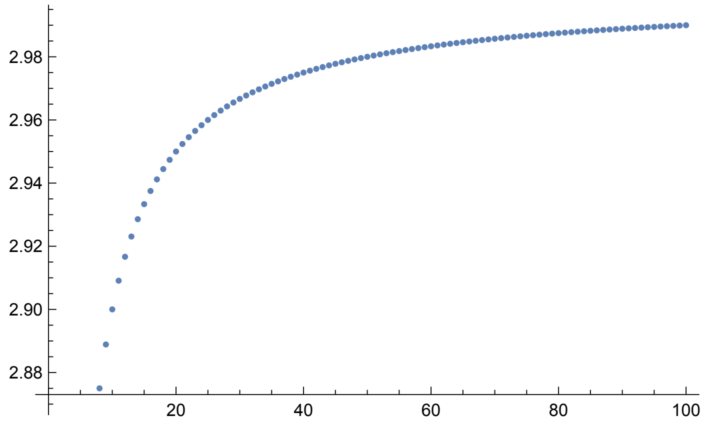
..ist eine harmonische Folge,allerdings mit negativem Vorzeichen und um den Wert 3 verschoben. Man sieht sofort, dass sie genau einen Häufungspunkt, nämlich 3, hat. Begründung: Für jedes ϵ sind alle Glieder der Folge ab dem Glied mit n_ϵ=[1/ϵ], also alle b_n mit n>n_ϵ, näher als ϵ vom Grenzwert B=3 entfernt:

$$n > \epsilon : \ |b_n - 3| = \frac{1}{n} < n_\epsilon = [1/\epsilon]$$

Wir zeichnen die ersten 100 Glieder der Folge:

In[•]:= `ListPlot[Table[3 - 1/n, {n, 1, 100}]]`

Out[•]=



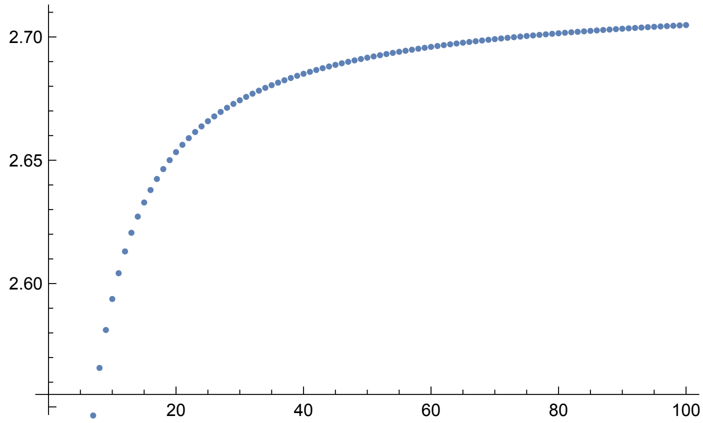
(c)

$b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Wir plotten die ersten 100 Glieder der Folge:

In[•]:= `ListPlot[Table[(1 + 1/n)^n, {n, 1, 100}]]`

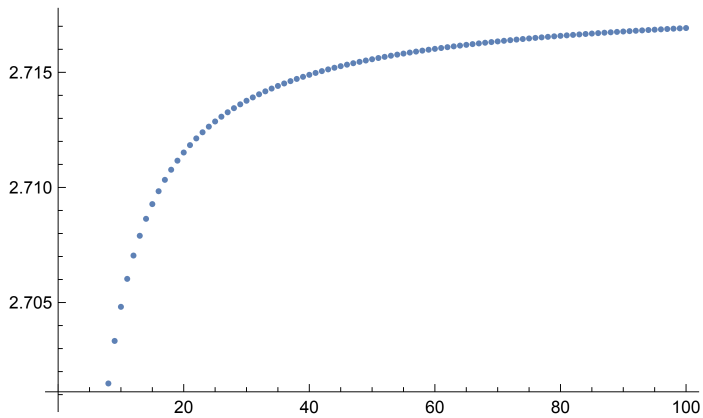
Out[•]=



Das geht uns zu langsam, deswegen plotten wir nun nur mehr jedes 10. Glied der ersten 1000 Glieder der Folge:

In[•]:= `ListPlot[Table[(1 + 1/(10 n))^(10 n), {n, 1, 100}]]`

Out[•]=



Die Folge scheint sich einem Wert nahe 2.71 anzunähern. Auch ist sie monoton steigend. Wenn wir die Beschränktheit (von oben) beweisen, dann existiert ein Grenzwert, nämlich die kleinste obere Schranke.

Es handelt sich um einen klassischen Beweis. Wir zeigen zuerst die Monotonie. Sicher gilt

$b_n < b_{2n}$ wegen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)^n.$$

Nun beweisen wir die Existenz einer oberen Schranke.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3}\ldots$$
$$= 1+1+\frac{(n-1)}{2n}+\frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}\ldots$$
$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\ldots$$

und daher gilt

$$b_n < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$
$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Die letzte Ungleichung kann man leicht nachprüfen: Ab k=1 ist k! immer größer oder gleich als 2^{k-1}. Damit ist die Folge nach oben beschränkt.

Zur Bestimmung des Grenzwertes kann man (im Vorgriff zur Differenzialrechnung) wie folgt argumentieren.

(Da sicher $1 < b_n(x) \leq b_n$ gilt, gelten alle unseren bisherigen Ergebnisse auch für $b_n(x)$.) Wir nennen den Grenzwert

$$B(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x).$$

$$\frac{dB(x)}{dx} = \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \Big/ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)$$
$$= B(x).$$

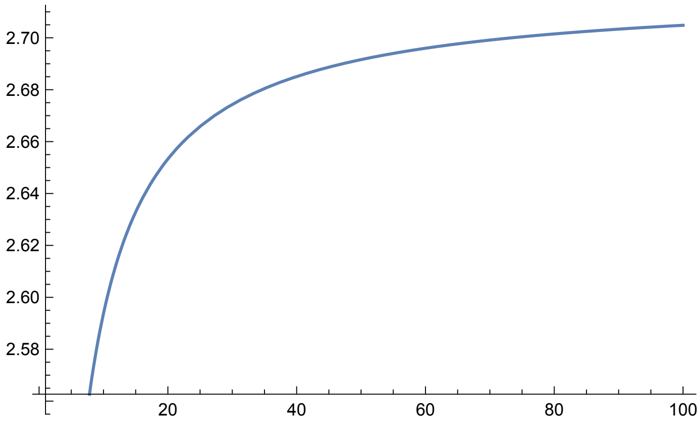
Die einzige (nichtverschwindende) Funktion, deren Ableitung sich selbst reproduziert, und deren Wert B(0)=1 ist, ist die Exponentialfunktion e^x zur Basis e=2.71828... Es ist also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = B = e.$$

Wie verhält sich die Folge? Hier ein Plot

In[•]:=
```
Plot[(1 + 1 / n) ^n, {n, 1, 100}]
```

Out[•]=



Was liefert Mathematica für diese Aufgabe? Wir finden

In[•]:=
```
Limit[(1 + 1 / n) ^n, n -> Infinity]
```

Out[•]= e

Hier noch etwas genauer:

In[•]:=
```
N[E, 40]
```

Out[•]= 2.718281828459045235360287471352662497757

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.5

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n^2 + 5}{5n^3 + 2n - 1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{-n}(n+1)(n-1)}{3n^2}$, $a > 1$

(d) $\lim_{n\to 0} \frac{2n^3 - n}{5n^3 - 2n}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + e^n}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Lösungsweg

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}$$

Wir berechnen diese erste Aufgabe etwas ausführlicher:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - 1/n}{\lim_{n\to\infty} 1 + 1/n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Wir haben dabei (1.11) verwendet.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{-n}\,(n+1)\,(n-1)}{3\,n^2}, \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{-n}\,(n+1)\,(n-1)}{3\,n^2}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} a^{-n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)\,(1-1/n)}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0 \ \text{ für a} > 1\,.$$

(d)

$$\lim_{n\to 0} \frac{2\,n^3 - n}{5\,n^3 - 2\,n}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to 0} \frac{2\,n^3 - n}{5\,n^3 - 2\,n} = \lim_{n\to 0} \frac{2\,n^2 - 1}{5\,n^2 - 2} = \frac{1}{2.}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Wir schreiben dieses Produkt an:

$$\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}(\frac{k^2 - 1}{k^2})$$

$$= \prod_{k=2}^{n}(\frac{(k-1)\,(k+1)}{k^2})$$

$$= \frac{1.3}{2.2} \times \frac{2.4}{3.3} \times \frac{3.5}{4.4} \ldots \frac{(n-2).n}{(n-1).(n-1)} \, \frac{(n-1).(n+1)}{n.n}$$

$$= \frac{(n+1)}{2\,n}$$

Damit ist also

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2\,n} = \frac{1}{2.}$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.6

Beweisen Sie, dass

$$(a) \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

und

$$(b) \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \text{ für a} > 0\,.$$

Lösungsweg

(a)

Wir zeigen zuerst, dass diese (positive) Folge

$a_n = n^{1/n}$

für n>e monoton fällt, und dann, dass sie durch 1 von unten beschränkt ist.

Wir fragen also: Ist

$(n+1)^{1/(n+1)} < n^{1/n}$?

Die n(n+1)-te Potenz ergibt

$(n+1)^n < n^{n+1} \to$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$

Die linke Seite nähert sich asymptotisch (von unten) der Zahl e=2.71... und ist daher sicher kleiner als 3. Damit ist ab n=3 die Ungleichung und somit die Monotonie der Folge a_n erfüllt. Auch ist sicher a_n>1 (leicht zu sehen, nehmen Sie die n-te Potenz!). Damit existiert ein Grenzwert A.

Wir zeigen nun, dass dieser Grenzwert gleich A=1 ist. Dazu betrachten wir die (unendliche) Teilfolge (a_{2n}), die natürlich denselben Grenzwert A hat. Es gilt also

$$A = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/(2n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2^{1/(2n)} \lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^{1/n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$
$$= \sqrt{A}$$

Damit muss aber A=1 sein!

Man könnte - wenn man eine gewisse Vorkenntnis voraussetzt (siehe (1.49))- auch einfach den Grenzwert des Logarithmus von $\sqrt[n]{n}$ untersuchen:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n} = 0.$$

Das ergibt sich eben aus der Kenntnis, dass der Logarithmus langsame als jede positive Potenz wächst. Daraus ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \operatorname{Log} \sqrt[n]{n}\right)$$
$$= \exp(0) = 1.$$

(b)

Wir betrachten den Limes des Logarithmus von $\sqrt[n]{a}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} a}{n} = 0$$

und daher ist

$$\exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} a}{n}\right) = \exp(0) = 1$$

wie man zeigen sollte.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

1.9

Überrprüfen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n ((n+1)!)^2}{(2n)!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)(n+3)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(h) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n-1}$

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2+7}$

(o) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right).$

Lösungsweg

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\,\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \frac{1}{2} < 1 \;\to \text{konvergent}$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{2n}}$$

Wurzelkriterium:

$$\rho_n = \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{1/n} = \left(\frac{3^n}{2^{2n}}\right)^{1/n} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \frac{3}{4} < 1 \;\to \text{konvergent}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{2^n}$$

$$= \frac{2\,(n+1)!}{(n+2)\,(n+1)!} = \frac{2}{n+2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+2} = 0 \;\to \text{konvergent}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\,((n+1)!)^2}{(2n)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \frac{5^{n+1}\,((n+2)!)^2}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{5^n\,((n+1)!)^2}$$

$$= \frac{5\,(n+2)^2\,(2n)!}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}$$

$$= \frac{5\,(n+2)^2}{(2n+2)\,(2n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5\,(n+2)^2}{(2n+2)\,(2n+1)}$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \to \text{divergent}$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{100^{n+1}} \frac{100^n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{100}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{100} \to \infty \to \text{divergent}$$

Das ist ein Beispiel dafür, wie man sich täuschen kann, wenn man nur die ersten Terme einer Reihe ansieht:

$$0.01 + 0.0002 + 0.000006 + 0.00000024 \ldots$$

Das sieht "recht konvergent" aus, erst bei den höheren Termen gewinnt schließlich n! im Zähler und die Reihe divergiert sogar termweise! Es ist also nicht einmal die notwendige Bedingung für Konvergenz (Nullfolge) erfüllt!

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2)(n+3)}$$

Die Glieder der Reihe haben das asymptotische Verhalten 1/n, wie die harmonische Reihe. Wir erwarten daher Divergenz. Wenn man hier nach dem Quotienten- oder Wurzelkriterium ρ berechnet, erhält man 1, also keine Entscheidung. Der Vergleich mit der (divergenten), um k verschobenen harmonischen Reihe

$$b_n = \frac{1}{n+k}$$

zeigt:

$$a_n > \frac{1}{n+k}$$

$$\frac{n-1}{(n+2)(n+3)} > \frac{1}{n+k}$$

$$n\,(k-6) > 6+k$$

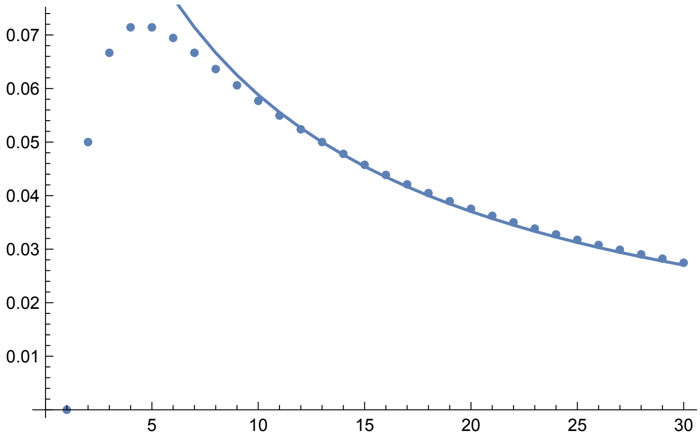
$$n > \frac{k+6}{k-6}$$

Für k=7 und n>13 ist die Reihe termweise größer als die harmonische Reihe!

Wir plotten die Werte der Reihenglieder a_n als auch die der verschobenen harmonischen Reihe b_n **:**

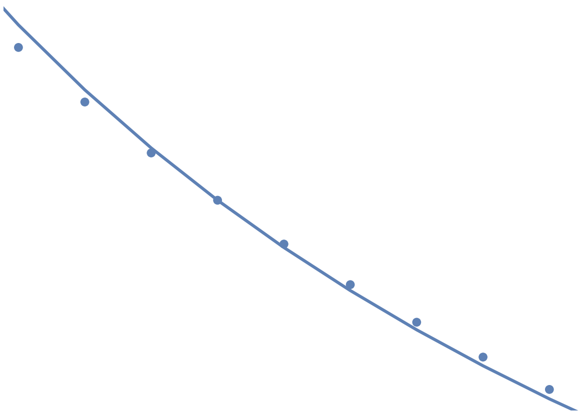
In[•]:=
```
PA = ListPlot[Table[(n - 1)/((n + 2) (n + 3)), {n, 1, 30}], DisplayFunction -> Identity];
PB = ListPlot[Table[1/(n + 7), {n, 1, 30}],
    Joined -> True, DisplayFunction -> Identity];
Show[PA, PB, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
Show[PA, PB, PlotRange -> {{10, 20}, {0.04, 0.06}},
DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[•]=



Die Reihe majorisiert die harmonische Reihe und ist also sicher divergent.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = 1 \to \text{unentschieden!}$$

Damit (oder mit dem Wurzelkriterium) klappt die Untersuchung also nicht. Aber: die Reihe ist alternierend und im Betrag monoton fallend, daher **bedingt konvergent** (Leibniz-Kriterium).

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n-1}$$

Keine Nullfolge, daher divergent!

(i)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$$

Hier greift das Vergleichskriterium.
Es gilt (wie man leicht überprüfen kann):

$$\frac{1}{\text{Log}[n]^2} > \frac{1}{n}$$

da die harmonische Reihe aber divergiert, gilt das auch für die untersuchte Reihe!

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Hier versuchen wir es mit dem Integraltest.

In[ ]:= $\text{Integrate}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, n\right]$

Out[ ]= $2\sqrt{n}$

Dieser Ausdruck divergiert für $n \to \infty$ und daher ist die Reihe divergent.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

Die Beträgewerden durch $1/n^2$ majorisiert, daher konvergiert diese Reihe sicher!.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$$

Es gilt

$$3^{\text{Log}[n]} = E^{\text{Log}[3]\,\text{Log}[n]} = n^{\text{Log}[3]}$$

die Reihe kann also auch in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln 3}} \quad (\ln 3 = 1.09861\ldots)$$

geschrieben werden. Nach den Integralkriterium sind Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

für a>1 konvergent, daher auch diese Reihe.

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Quotientenkriterium, siehe Aufgabe (a): konvergent

(n)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^2+7}$$

Die Terme dieser Reihe sind positiv und im Betrag kleiner als

$$\frac{2+(-1)^n}{n^2+7} < \frac{3}{n^2}$$

Da die Vergleichsreihe konvergiert, gilt das auch für die untersuchte!

(o)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

Die Terme der Reihe haben die Form

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{-1}{n\,(n-1)}$$

fallen also quadratisch ab. Die Reihe ist (Integraltest) konvergent.Man kann die Summe finden, indem man die Reihe anschreibt:

$$\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \ldots.$$

Man erkennt, dass sich aufeinander folgende Terme aufheben (1/2 gegen -1/2, 1/3 gegen -1/3 und so weiter). Die Partialsumme der ersten k-1 Terme ergibt daher

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = -1 + \frac{1}{k}$$

und konvergiert daher für k→∞ gegen die Summe -1.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

1.10

Die Kochsche Schneeflocke ist ein Beispiel für eine fraktale Kurve. Konstruktionsvorschrift: Das Anfangsobjekt ist ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge a). Man drittle jede Dreieckseite und konstruiere über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge ein Drittel der ursprünglichen Seitenlänge ist. Man wiederhole diesen Vorgang immer wieder.
Berechnen Sie den Umfang und die eingeschriebene Fläche der Kochschen Kurve.

Lösungsweg

Die Kochkurve hat ihren Reiz. Wir beginnen daher mit einer kurzen Diskussion, wie man zur graphis-chen Darstellung kommt.

Wir definieren dazu ein iterativ aufrufendes Programm Fline[a,b,n], welches zwei Punkte a und b (in der Ebene: zwei-komponentige Vektoren, in Mathematica als Table mit zwei Einträgen dargestellt) entweder

- wenn die Iterationstiefe schon erreicht ist (n=0) durch eine Strecke (Line[{a,b}]) verbindet, oder

- wenn n<0, also die Iterationstiefe noch nicht erreicht ist, statt dessen vier neue Fline-Kommandos aufsetzt, jeweils für die vier Teilstrecken (siehe unten).

In[•]:=
```
Fline[a_, b_, n_] := Block[{d, aa, bb, cc},
        (d = N[b - a];
        cc = N[(a + b) / 2 + N[Sqrt[3] / 6] {-d[[2]], d[[1]]}];
        aa = N[(2 a + b) / 3];
        bb = N[( a + 2 b) / 3];
    If[n == 0, Line[{a, b}], {Fline[a, aa, n + 1],
      Fline[aa, cc, n + 1], Fline[cc, bb, n + 1], Fline[bb, b, n + 1]}])];
```

Wir demonstrieren zuerst die Funktionsweise. Dazu rufen wir auf:

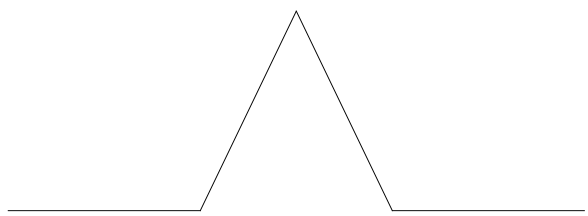
In[•]:=
```
Fline[{0, 0}, {1, 0}, -1]
```

Out[•]=
```
{Line[{{0, 0}, {0.333333, 0.}}], Line[{{0.333333, 0.}, {0.5, 0.288675}}],
 Line[{{0.5, 0.288675}, {0.666667, 0.}}], Line[{{0.666667, 0.}, {1, 0}}]}
```

Die Strecke von (0,0) nach (1,0) wurde also durch folgende Strecken ersetzt:

In[•]:=
```
Show[Graphics[Fline[{0, 0}, {1, 0}, -1]],
 PlotRange -> {{-0.1, 1.1}, {-0.1, 0.4}}, AspectRatio -> 0.5]
```

Out[•]=

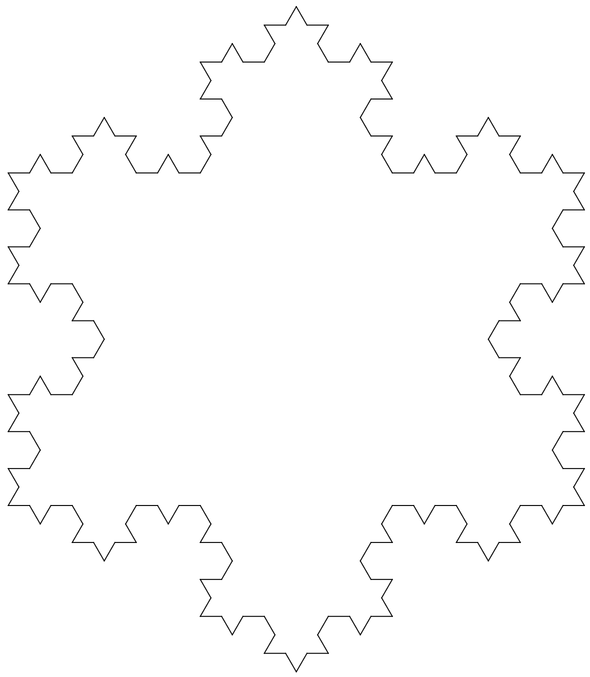


Nun wollen wir drei Punkte eines gleichseitigen Dreiecks statt mit Strecken mit solcher Art iterierten (Iterationstiefe -3) Streckenzügen ersetzen.

In[•]:=
```
LLa = Fline[{0, 0}, {0.5, N[Sqrt[3] / 2]}, -3];
LLb = Fline[{0.5, N[Sqrt[3] / 2]}, {1, 0}, -3];
LLc = Fline[{1, 0}, {0, 0}, -3];
```

In[•]:=
```
Show[Graphics[Flatten[{LLa, LLb, LLc}]],
 PlotRange -> {{-0.1, 1.1}, {-0.3, 0.9}}, AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=



Wenn wir n=-∞ nehmen, dann beschriebe dies die Kochkurve - ein Fraktal. In der Praxis schafft das unsere Computer nicht, da dann ja auch unendlich viele Teilstrecken zu berechnen (und zwischenzuspeichern) wären!. (Bis zur Iterationstiefe n=-5 sollte es aber klappen.)

Wir suchen den Umfang und die Fläche dieses Objekts.

Das ursprüngliche Dreieck habe die Seitenlänge s_0 =a, also den Umfang U_0=3a.

Wir bezeichnen die Zahl der Strecken und deren Länge nach dem n - ten Iterationsschritt mit k_n und s_n.

In jedem Iterationsschritt wird die Seite s_n durch vier neue Strecken der Länge

$s_n = s_{n-1}/3 \rightarrow s_n = a\,3^{-n}$

ersetzt. Die Zahl der Strecken wird mit einem Faktor 4 multipliziert:

$k_n = 3 .\ 4^n$

Der Umfang wächst also um den Faktor 4/3. Nach n Schritten hat er den Wert

$$U_n = U_0 \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dieser Ausdruck divergiert für n→∞.

Die Fläche des Ausgangsdreiecks ist

$$A_0 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4.}$$

Bei jedem Iterationsschritt kommt ein Beitrag

$$A_n = k_{n-1}\, s_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\ .\ 4^{n-1}\, a^2\, 3^{-2n} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\ 4^{n-2} \times 3^{2-2n}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}\ a^2}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

hinzu (entsprechend k_{n-1} Dreiecken). Die Summe ist daher

$$\text{Gesamtfläche} = A_0 + \frac{3\sqrt{3}\ a^2}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Die Summe ist eine geometrische Reihe (ohne den Term n=0). Der Faktor ist kleiner als 1, damit konvergiert die Reihe und hat den Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

Daher gilt

In[∘]:= $$\text{Gesamtfläche} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + a^2\frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{4}{5}$$

Out[∘]= $$\frac{2\sqrt{3}\ a^2}{5}$$

Die Fläche ist also endlich.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.11

Berechnen Sie die ersten drei Glieder der MacLaurin-Reihe der Funktionen:

(a) $\frac{1+x}{1-x}$,

(b) $(\sin x)^2$,

(c) $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Lösungsweg

Das allgemeine Glied der MacLaurin-Reihe(=Taylorreihe um x=0) hat die Form

$$a_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

wobei $f^{(n)}$ (0) die n - te Ableitung,
berechnet an der Stelle x = 0 ist. Also aufpassen : zuerst ableiten,
dann x = 0 setzten, nicht umgekehrt!

(a)

Die ersten drei Ableitungen der Funktion sind:

In[∘]:=
```
f1 = D[(1 + x) / (1 - x), {x, 1}]
```

Out[∘]= $$\frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

In[•]:= `f2 = D[(1 + x) / (1 - x), {x, 2}]`

Out[•]= $\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{2\,(1+x)}{(1-x)^3}$

In[•]:= `f3 = D[(1 + x) / (1 - x), {x, 3}]`

Out[•]= $\frac{6}{(1-x)^3}+\frac{6\,(1+x)}{(1-x)^4}$

Bei x=0 haben sie den Wert

In[•]:= `f1 /. x -> 0`

Out[•]= 2

In[•]:= `f2 /. x -> 0`

Out[•]= 4

In[•]:= `f3 /. x -> 0`

Out[•]= 12

Es ist f0=f(0)=1 und damit lauten die ersten Koeffizienten:

$a_0 = 1,$

$a_1 = 2,$

$a_2 = 4 / 2 != 2,$

$a_3 = 12 / 3 != 2, \; ...$

Die MacLaurin Reihe lautet also

$1 + 2\,x + 2\,x^2 + 2\,x^3 \; ....$

(Nur die ersten drei Terme waren gefragt.)

Alternativer Weg:

Die Reihe für 1/(1-x) lautet

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ...$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit (1+x) multiplizieren, bekommen wir

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x) + \left(x + x^2\right) + \left(x^2 + x^3\right) + \; ...$$
$$= 1 + 2\,x + 2\,x^2 + ...$$

wie oben!

Das Differenzieren ist so automatisierbar, dass Mathematica ein Standardpaket zur Berechnung von Taylorreihen hat. Damit erhalten wir in diesem Beispiel ebenfalls das gesuchte Ergebnis, hier die ersten 10 Terme der Reihe:

In[•]:= `Series[`$\frac{1+x}{1-x}$`, {x, 0, 9}]`

Out[•]= $1 + 2\,x + 2\,x^2 + 2\,x^3 + 2\,x^4 + 2\,x^5 + 2\,x^6 + 2\,x^7 + 2\,x^8 + 2\,x^9 + O[x]^{10}$

(b)

Im Beispiel (a) haben wir schon verschiedene Methoden zur Reihenberechnung diskutiert. Wir verwenden hier daher nur mehr das *Mathematica*-Paket Series.

In[•]:=
```
Series[Sin[x]^2, {x, 0, 6}]
```

Out[•]= $x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2\,x^6}{45} + O[x]^7$

(c)

Im Beispiel (a) haben wir schon verschiedene Methoden zur Reihenberechnung diskutiert. Wir verwenden hier daher nur mehr das *Mathematica*-Paket Series.

In[•]:=
```
Series[Cosh[x], {x, 0, 4}]
```

Out[•]= $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O[x]^5$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.13

Zeigen Sie, dass sich die Reihenentwicklungen der Funktionen

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{und} \quad e^x$$

um den Punkt x=0 erst ab einer höheren Ordnung in x unterscheiden. Berechnen Sie die Differenz der beiden Funktionen für x=0.001 und x=0.1 sowohl mit Hilfe der Reihenentwicklung als auch auf dem Taschenrechner durch Subtraktion der Funktionswerte.

Lösungsweg

In[•]:=
```
f[x_] = Sqrt[(1 + x)/(1 - x)];
```

In[•]:=
```
g[x_] = Exp[x];
```

In[•]:=
```
Reihef = Series[f[x], {x, 0, 4}]
```

Out[•]= $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3\,x^4}{8} + O[x]^5$

In[•]:=
```
Reiheg = Series[g[x], {x, 0, 4}]
```

Out[•]= $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O[x]^5$

Ein Unterschied tritt also erst ab dem vierten Term auf!

Auf dem Taschenrechner (8 Stellen Genauigkeit) erhalten wir bei x=0.001:

In[•]:=
```
N[f[0.001], 8]
```

Out[•]= 1.001

In[•]:=
```
N[g[0.001], 8]
```

Out[•]= 1.001

Die beiden Funktionswerte sind also (auf 8 Stellen genau) ununterscheidbar. Die Differenz der

Reihen ist

In[∘]:=
```
Diff = Reihef - Reiheg
```

Out[∘]= $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + O[x]^5$

und bei x=0.001 ergibt das

In[∘]:= $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3}$ `/. x -> 0.001`

Out[∘]= 3.33667×10^{-10}

Wir hätten die Funktionen also zumindest bis zur 10. Stelle (nach dem Komma) genau berechnen müssen, um diesen Unterschied feststellen zu können. Die Reihe war hier präziser!

Bei x=0.1 ergeben analoge Rechnungen

In[∘]:=
```
N[f[0.1], 8]
```

Out[∘]= 1.10554

In[∘]:=
```
N[g[0.1], 8]
```

Out[∘]= 1.10517

Die Differenz ist 1.1055416-1.1051709=0.0003707.

Die Differenz der Reihen ist bei x=0.1:

In[∘]:= $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3}$ `/. x -> 0.1`

Out[∘]= 0.000366667

Hier ist der Taschenrechner genauer, da der Fehler der
nicht berücksichtigten Reihenteile (das Restglied) O (x^5) ist.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.14

Berechnen Sie das Konvergenzintervall der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\, x)^n}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{\cos nx}{2}\right)^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^2}{3^n}$.

Lösungsweg

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{2^n}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)\, x^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2\, x^n}\right|$$

$$= \frac{|x|}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{|x|}{2} < 1$$

$\to$ konvergent für $|x| < 2$.

Rand : $x = \pm 2 \to a_n = (\pm 1)^n\, n$ divergent.

Konvergenzbereich: -2<x<2

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n^2+2n+2} \frac{n^2+1}{x^n}\right|$$

$$= |x| \frac{n^2+1}{n^2+2n+2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = |x| < 1$$

$\to$ konvergent für $|x| < 1$

Rand : $x = \pm 1 \to a_n = \frac{(\pm 1)^n}{n^2+1}$ ist ebenfalls konvergent.

Konvergenzbereich: $-1 \le x \le 1$.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\, x^n}\right|$$

$$= |x| \frac{(n+1)\, n!\, n^n}{(n+1)\,(n+1)^n\, n!}$$

$$= |x| \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{e}$$

$\to$ konvergent für $|x| < e$

Rand : $x = \pm e \to a_n = (\pm 1)^n \dfrac{n!\,e^n}{n^n}$ konvergent oder divergent?

Spätestens hier brauchen wir das asymptotische Verhalten von n!, wie es zum Beispiel durch die Stirlingsche Formel gegeben ist:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Damit ist asymptotisch

$$|a_n| = \frac{n!\,e^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

also keine Nullfolge. Daher konvergiert die Reihe an den beiden Rändern nicht.
Der Konvergenzbereich ist damit: $-e < x < e$.

Auch mit dem Wurzelkriterium hätte man diesen Fall behandeln können:

$$\rho_n = (|a_n|)^{1/n} = \left| n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \right|^{1/n}$$

$$= \left|\frac{x}{n}\right| (n!)^{1/n}$$

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| (n!)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| \left(\frac{n}{e}\right) (2\pi n)^{1/2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \left|\frac{x}{e}\right|$$

Weiter verläuft die Diskussion wie oben.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\,x)^n}{n!}$$

Mit dem Quotientenkriterium ergibt sich

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n x^n}\right|$$

$$= \frac{|x| (n+1)^n}{n^n} = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = |x|\,e$$

Daher ist die Reihe zumindest für $|x|<1/e$ sicher konvergent.

Rand: $x=\pm 1/e$

Der Vergleich zur Aufgabe (c) zeigt, dass die Reihenglieder am Rand nun eine Nullfolge bilden, mit

$$\left|\frac{(\pm n\,x)^n}{n!}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

Für x=-1/e folgt nach dem Leibniz-Kriterium daher bedingte Konvergenz, für x=1/e ist die Reihe divergent.

Konvergenzbereich: -1/e ≤ x < 1/e

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n (3n-1)}$$

Mit dem Quotientenkriterium ergibt sich

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}}{2^{n+1} (3n+2)} \frac{2^n (3n-1)}{(-1)^n (x-1)^n} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2} \frac{3n-1}{3n+2}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{|x-1|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{3n+2} = \frac{|x-1|}{2}$$

Daher ist die Reihe zumindest für |x-1| < 2 oder, anders geschrieben, -1 < x < 3 sicher konvergent.

Rand: x=-1

$$a_n = \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n (3n-1)} = \frac{1}{(3n-1)}$$

Das ist vom Typ her eine harmonische Reihe und daher divergent.

Rand: x=3

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{2^n (3n-1)} = \frac{(-1)^n}{(3n-1)}$$

Das ist vom Typ her eine alternierend harmonische Reihe und daher bedingt konvergent.

Konvergenzbereich daher: -1 < x ≤ 3

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{\cos nx}{2}\right)^n}$$

Wurzelkriterium:

$$\rho_n = (|a_n|)^{1/n} = \left| \frac{n^2}{\left(2 + \frac{\cos nx}{2}\right)^n} \right|^{1/n}$$

$$= \frac{n^{2/n}}{\left| 2 + \frac{\cos nx}{2} \right|}$$

Nun ist wegen -1≤ cos nx ≤1 sicher

$$\rho_n = \frac{n^{2/n}}{\left| 2 + \frac{\cos nx}{2} \right|} \leq \frac{n^{2/n}}{\left| \frac{3}{2} \right|}$$

und es gilt

$$\rho \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/n}}{\left| \frac{3}{2} \right|} = \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left| \frac{3}{2} \right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

Daher ist auch $\rho \leq \frac{2}{3} < 1$; das Konvergenzgebiet umfasst alle x∈R.

(g)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,x)^2}{3^n}$$

Quotientenkriterium:

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(2\,x)^2}{3^{n+1}} \; \frac{3^n}{(2\,x)^2} \right|$$
$$= \frac{1}{3} = \rho$$

Daher ist die Reihe für beliebige x konvergent
(Konvergenzgebiet: x∈R)!

Man hätte das auch daran gesehen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,x)^2}{3^n} = (2\,x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 4\,x^2 \frac{1}{1-1/3} = 6\,x^2.$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.15

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der entsprechenden Potenzreihe auf drei Stellen genau:

(a) $e \left(= e^1 \right)$,

(b) $\frac{1}{1.01}$,

(c) $\ln 0.99$,

(d) $\ln 3$.

Lösungsweg

(a)

Die Reihe für e^x lautet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bei x=1 sind die ersten Terme dieser Reihe (jeweils auf 5 signifikante Stellen genau):

In[•]:=
```
Do[Print["a_", n, " =  1/", n, "! = ",
    N[1 / n!, 5]], {n, 0, 8}]
```

```
a_0 =  1/0! = 1.0000
a_1 =  1/1! = 1.0000
a_2 =  1/2! = 0.50000
a_3 =  1/3! = 0.16667
a_4 =  1/4! = 0.041667
a_5 =  1/5! = 0.0083333
a_6 =  1/6! = 0.0013889
a_7 =  1/7! = 0.00019841
a_8 =  1/8! = 0.000024802
```

Die Reihe konvergiert also langsam. Die Partialsummen sind:

In[∘]:=
```
P[0] = 1;
Do[P[n] = P[n - 1] + 1/n! , {n, 1, 8}]
```

In[∘]:=
```
Do[Print["S_", n, " = ", N[P[n], 5]], {n, 1, 8}]
```

```
S_1 = 2.0000
S_2 = 2.5000
S_3 = 2.6667
S_4 = 2.7083
S_5 = 2.7167
S_6 = 2.7181
S_7 = 2.7183
S_8 = 2.7183
```

(b)

Dazu betrachtet man die ersten Terme der Reihe für

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

an der Stelle x= -0.01 (1-x = 1.01):

$$1 - 0.01 + (-0.01)^2 + (-0.01)^3 + \ ... \ = 1 - 0.01 + 0.0001 + ... \ = 0.9901 \ + ...$$

und dies ist bereits auf 4 Stellen genau!

(c)

Es ist die Reihe für

$$\text{Log}[1 - x] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

angewandt bei x=0.01 ergeben die ersten Terme

$$-0.01 + \frac{0.0001}{2} \ ... \ = -0.00995 \ ...$$

Der erste nicht berücksichtigte Term lautet -0.000001/3=0.000000333.. und schätzt gleichzeitig den maximalen Fehler ab, da es sich um eine alternierende Reihe handelt. Da Ergebnis ist also auf 6 Stellen genau!

(d)

Wir erkennen

$$\text{Log}[3] = \text{Log}\left[\frac{3\,E}{E}\right] = \text{Log}[E] + \text{Log}\left[\frac{3}{E}\right]$$
$$= 1 + \text{Log}\left[\frac{3}{E}\right] = 1 + \text{Log}\left[1 + \left(\frac{3}{E} - 1\right)\right]$$
$$= 1 + \text{Log}\left[1 + \frac{3 - E}{E}\right]$$

und verwenden die Entwicklung des natürlichen Logarithmus wie in Aufgabe (c) für

$$-x = \frac{3 - E}{E} = 0.103638\ldots$$

Die ersten Terme lauten

$$1 - \left((-0.103638) + \frac{(-0.103638)^2}{2} + \frac{(-0.103638)^3}{3} + \frac{(-0.103638)^4}{3} + \ldots\right)$$

und die Folge der entsprechenden Teilsummen ist (auf 4 Stellen gerundet)

1.1036, 1.0983, 1.0986 ..., 1.0986 ...

(Der exakte Wert ist übrigens 1.0986122..)

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.16

Verwenden Sie MacLaurin-Reihen, um folgende Grenzwerte zu berechnen:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Lösungsweg

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Die ersten Terme der MacLaurin Reihe für Tan[x] sind

In[∘]:=
```
Series[Tan[x], {x, 0, 3}]
```

Out[∘]= $x + \frac{x^3}{3} + O[x]^4$

Daher ist

$$\frac{\text{Tan}[x]}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + O[x]^3$$

und der gesuchte Grenzwert ist also 1.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$$

Die Reihe für Sin[x] hat die Form

$$\text{Sin}[x] = x - O[x]^3$$
$$\to (\text{Sin}[x])^2 = x^2 - O[x]^4$$
$$\to \frac{(\text{Sin}[x])^2}{x} = x - O[x]^3$$

Der Grenzwert ist damit

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \left(x - O[x]^3 \right) = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Die MacLaurin Reihe für die Funktion im Zähler lautet:

In[•]:=
```
Series[Log[1 + x], {x, 0, 2}]
```

Out[•]= $x - \frac{x^2}{2} + O[x]^3$

und daher

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{Log}[1+x]}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O[x]^3}{x} = 1.$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.17

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\ (x+a)} - x \right)$

(e) $\lim_{x\to\pi} \frac{x\ \sin x}{x-\pi}$

(f) $\lim_{x\to\infty} x^n\ e^{-x}$

(g) $\lim_{x\to 0} x\ (\ln x)^n$, $(n \in N)$

(h) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)}$

(i) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x^2)+e^x}$

Lösungsweg

Die Aufgaben (bis auf eine Ausnahme) sind unbestimmte Formen und werden daher meist am einfachsten nach der Regel von de l'Hospital berechnet.

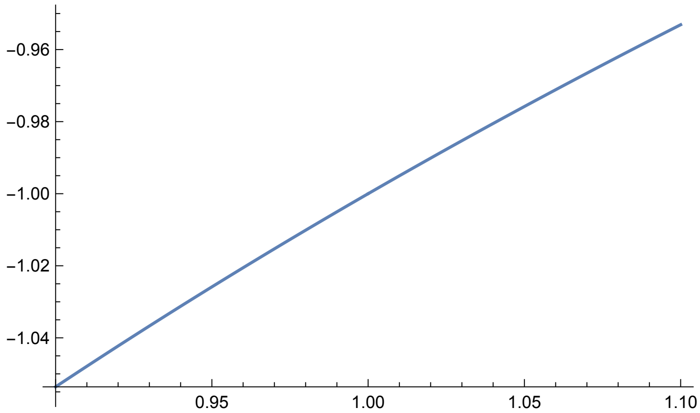
Fallweise zeichnen wir auch den Funktionsverlauf.

(a)

Die Funktion verläuft folgend:

In[∘]:= `Plot[Log[x]/(1 - x), {x, 0.9, 1.1}]`

Out[∘]=



Allerdings ist sie bei x=0 eigentlich nicht definiert:

In[∘]:= `Log[x]/(1 - x) /. x -> 1`

Power: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered.

Out[∘]= `Indeterminate`

Wohl aber existiert der Grenzwert:

In[∘]:= `Limit[Log[x]/(1 - x), x -> 1]`

Out[∘]= -1

Wir berechnen diese mit der Regel von de l'Hospital:

In[∘]:= `Zähler = D[Log[x], x]`

Out[∘]= $\frac{1}{x}$

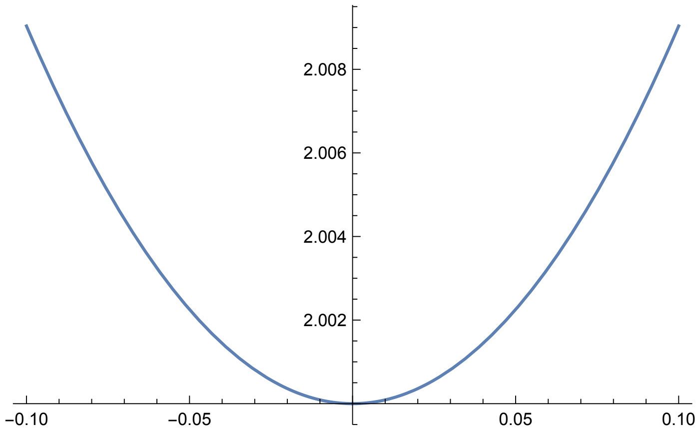
In[•]:=
```
Nenner = D[1 - x, x]
```
Out[•]= -1

Da sowohl Zähler als auch Nenner bei x=1 endlich und ungleich 0 sind, existiert der Quotient und damit der Grenzwert:

In[•]:=
```
Grenzwert = (Zähler / Nenner) /. x -> 1
```
Out[•]= -1

(b)

In[•]:=
```
Plot[(Tan[x] - x)/(x - Sin[x]), {x, -0.1, 0.1}]
```
Out[•]=



Bei x=0 ist das eine 0/0 Form und die Funktion ist durch den Grenzwert gegeben:

In[•]:=
```
Zähler = D[Tan[x] - x, x]
```
Out[•]= $-1 + \mathrm{Sec}[x]^2$

In[•]:=
```
Nenner = D[x - Sin[x], x]
```
Out[•]= $1 - \mathrm{Cos}[x]$

Beide Ausdrücke verschwinden bei x=0, wir müssen noch einmal ableiten:

In[•]:=
```
Zähler = D[Zähler, x]
```
Out[•]= $2\,\mathrm{Sec}[x]^2\,\mathrm{Tan}[x]$

In[•]:=
```
Nenner = D[Nenner, x]
```
Out[•]= $\mathrm{Sin}[x]$

Wieder verschwinden beide Ausdrücke bei x=0, wir müssen ein 3. Mal ableiten:

In[•]:=
```
Zähler = D[Zähler, x]
```
Out[•]= $2\,\mathrm{Sec}[x]^4 + 4\,\mathrm{Sec}[x]^2\,\mathrm{Tan}[x]^2$

In[•]:=
```
Nenner = D[Nenner, x]
```
Out[•]= $\mathrm{Cos}[x]$

Das Ergebnis lautet:

In[•]:= `Zähler/Nenner /. x -> 0`

Out[•]= 2

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

ist ein klassischer Fall. Man berechnet entweder nach der Regel von de l'Hospital:

In[•]:= $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

oder durch Potenzreihendarstellung:

In[•]:= $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O\left(x^3\right)}{x} = 1$$

oder, oder, oder...

(d)

Das ist eine ∞/∞ Form. Mit y=1/x wird es eine 0/0 Form:

In[•]:= $$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x\ (x+a)} - x \ \rightarrow\ \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+a\,y} - 1}{y}$$

In[•]:= `Limit[(Sqrt[1 + a y] - 1)/y, y -> 0]`

Out[•]= $\frac{a}{2}$

(e)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x\ \sin x}{x-\pi}$$

ist eine 0/0 Form, da ja $\sin\pi=0$ ist.

In[•]:= `Limit[x Sin[x] / (x - Pi), x -> Pi]`

Out[•]= $-\pi$

(Potenzreihenentwicklung um $x=\pi$ oder Regel von de l'Hospital.)

(f)

...ist eine 0.∞ oder ∞/∞ Form.

Wir schreiben

$\text{Zähler} = x^n,\ \ \text{Nenner} = E^x$

und müssen n-mal ableiten, bis der Zähler konstant wird. Der Nenner bleibt gleich und der Grenzwert ist daher 0. (Siehe auch (1.48): Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede beliebige Potenz.)).

Wir hätten auch den Logarithmus von $x^n\ E^{-x}$ untersuchen können :

$\text{Log}\left[x^n\ E^{-x}\right] = n\ \text{Log}[x] - x \ \rightarrow -\infty$

(g)

$$\lim_{x\to 0} x\,(\ln x)^n \;,\quad (n \in \mathbb{N})$$

Das ist ein $0.\infty$ Form, die wir in eine $\frac{\infty}{\infty}$ Form umwandeln und nach de l' Hospital weiterbehandeln:

$$\lim_{x\to 0} x\,(\ln x)^n = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}}$$

$$= -n \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\,(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x^2}} = -n \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x}}$$

$$= -n \lim_{x\to 0} x\,(\ln x)^{n-1}$$

Damit haben wir das Problem von (n) auf den Fall (n-1) zurückgeführt. Das kann man wiederholen, bis man schließlich beim Ausdruck

$$\lim_{x\to 0} x\,(\ln x)$$

ladet. Dieser ergibt

$$\lim_{x\to 0} x\,(\ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

(h)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$$

... ist eine $(0/0)^\infty$ - Form! Wir wissen allerdings aus (c), daß

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

gilt. Damit haben wir eigentlich eine unbestimmte Form vom Typ 1^∞.

Wir betrachten den Logarithmus des Ausdrucks:

$$\mathrm{Log}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \frac{\mathrm{Log}[\mathrm{Sin}[x]\,/\,x]}{1-\mathrm{Cos}[x]}$$

Das ist eine 0/0 Form. Nach der Regel von de l´Hospital leiten wir Zähler und Nenner getrennt ab und erhalten

In[•]:= **Zähler = Expand[D[Log[Sin[x] / x], x]]**

Out[•]= $-\frac{1}{x} + \mathrm{Cot}[x]$

In[•]:= **Nenner = D[1 - Cos[x], x]**

Out[•]= Sin[x]

Der Bruch ist wieder eine 0/0-Form:

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{-\mathrm{Sin}[x] + x\,\mathrm{Cos}[x]}{x^2\,\mathrm{Sin}[x]}$$

Bei genauerem Hinsehen erkennen wir (z.B. am Nenner), dass wir noch drei Mal in dieser Form Zähler und Nenner getrennt ableiten müssen, bis wir eine bestimmte Form erhalten (der Nenner ist O(x^3) !).

Wir leiten also getrennt ab:

In[∘]:= `Zähler = D[-Sin[x] + x Cos[x], {x, 3}]`

Out[∘]= $-2\,\mathrm{Cos}[x] + x\,\mathrm{Sin}[x]$

In[∘]:= `Nenner = D[x^2 Sin[x], {x, 3}]`

Out[∘]= $6\,\mathrm{Cos}[x] - x^2\,\mathrm{Cos}[x] - 6\,x\,\mathrm{Sin}[x]$

In[∘]:= `Zähler / Nenner /. x -> 0`

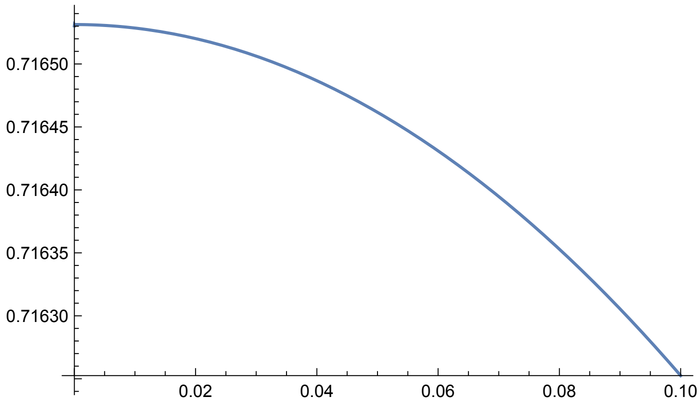
Out[∘]= $-\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} = \mathrm{Exp}\left[-\frac{1}{3}\right].$$

Wie sieht die Funktion aus? Hier ein Plot:

In[∘]:= `Plot[(Sin[x] / x) ^ (1 / (1 - Cos[x])), {x, 0.00001, 0.1}]`

Out[∘]=



Genau bei x=0 können wir die Funktion mit diesem Plot-Programm nicht zeichnen, da sie dort ja erst durch den Limes bestimmt werden muss.

(i)

Vorgangsweise vgl. (h)

In[∘]:= `Limit[Cos[x] ^ (1 / x^2), x -> 0]`

Out[∘]= $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(j)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$$

...ist KEINE unbestimmte Form, da der Zähler immer endlich ist. Der Grenzwert ist 0.

(k)

Das ist eine 0/0 Form:

In[∘]:= `Limit[Log[2 - x] / (1 - x), x -> 1]`

Out[∘]= 1

(l)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x^2)+e^x}$$

Wir können sie leicht lösen, indem wir umschreiben:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x^2)+e^x}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x)+\ln(1+x)+e^x}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+\frac{x^2}{\ln(1-x)}}{1+\frac{\ln(1+x)+e^x}{\ln(1-x)}} = 1$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.18

Aus zwei positiven reellen Zahlen a und b kann man verschiedene Mittelwerte bestimmen. Das Mittel der Ordnung α ist definiert als

$$S_\alpha(a,b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Bekannte Sonderfälle sind S_1, das arithmetische, und S_{-1}, das harmonische Mittel. Welche Grenzwerte ergeben sich für $\alpha \to 0, +\infty, -\infty$?

Überprüfen Sie Ihr Lieblings-Computeralgebra-Programm mit Hilfe dieser Aufgabe. (Hinweis: Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital!)

Lösungsweg

Wir untersuchen den Logarithmus des Ausdrucks:

$$\text{Log}\, S_\alpha(a,b) = \frac{1}{\alpha}\text{Log}\left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)$$
$$= \frac{\text{Log}\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

und bestimmen den Grenzwert nach der Regel von de l'Hospital durch Ableitung von Zähler und Nenner:

Es ist

In[∘]:=
```
D[Log[(a^α + b^α) / 2], α]
```

Out[∘]=
$$\frac{a^\alpha \text{Log}[a] + b^\alpha \text{Log}[b]}{a^\alpha + b^\alpha}$$

Wir haben dabei die Ableitungsregel

$$\frac{d\, a^x}{d\, x} = \frac{d\, e^{x \,\text{Ln}\, a}}{d\, x} = e^{x\, \text{Log}\, a}\, \text{Ln}\, a = a^x\, \text{Ln}\, a$$

verwendet.

$$\lim_{\alpha\to 0} \text{Log}\, S_\alpha(a,b) =$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\text{Log}\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{a^\alpha \text{Log}[a]+b^\alpha \text{Log}[b]}{a^\alpha+b^\alpha}}{1}$$

Der Grenzwert ergibt sich weiter zu

In[∘]:=
```
Limit[(a^α Log[a] + b^α Log[b])/(a^α + b^α), α → 0]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}(\text{Log}[a]+\text{Log}[b])$

und damit wird der Grenzwert das geometrische Mittel:

$S_0(a,b)=\sqrt{a\,b}$.

Mathematica kommt zum gleichen Ergebnis :

In[∘]:=
```
Limit[Log[(a^α + b^α) / 2] / α, α → 0]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}(\text{Log}[a]+\text{Log}[b])$

Für die Fälle $\alpha\to\pm\infty$ ändern sich nur die letzten Zeilen.
Fall $\alpha\to+\infty$: Falls a>b, so schreibt man

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\text{Ln}\,a)\,a^\alpha+(\text{Ln}\,b)\,b^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha}=$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\text{Ln}\,a)\,1^\alpha+(\text{Ln}\,b)\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha}{1^\alpha+\left(\frac{b}{a}\right)^\alpha}=\text{Ln}\,a$$

und damit wird $S_\infty = a$, falls b > a, vertauschen a und b die Rolle, Daher gilt

$S_\infty\,(a,b)=\max\,(a,b)$.

Fall $\alpha\to-\infty$: Hier argumentiert man analog, nur vertauschen die Ungleichungen und man erhält

$S_{-\infty}\,(a,b)=\min\,(a,b)$.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

1.19

In Hochenergiebeschleunigern werden die Elektronen auf Energien beschleunigt, die um viele Größenordnungen höher als ihre Ruhemasse sind ($\frac{m}{m_0}$>> 1). Die Geschwindigkeit v dieser Elektronen ist fast so groß wie die Lichtgeschwindigkeit c. Die relativistische Formel für das Verhältnis $\frac{v}{c}$ lautet

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}\ .$$

Berechnen Sie dieses Verhältnis über die ersten beiden Terme der binomischen Reihe für

$\frac{m}{m_0}$ = (a) 10^2, (b) 10^3 und (c) 2.5×10^6.

Lösungsweg

Mit $\frac{m_0}{m}$=x ist die Reihe um x=0:

In[•]:=
```
Series[Sqrt[1 - x^2], {x, 0, 2}]
```

Out[•]= $1 - \frac{x^2}{2} + O[x]^3$

Für die drei gegebenen Werte ist daher v/c näherungsweise:

$v / c = 1 - 0.5 \left(1 / 10^2\right)^2 = 1 - 10^{-4} = 0.9999500000$

$v / c = 1 - 0.5 \left(1 / 10^3\right)^2 = 1 - 10^{-6} = 0.9999995000$

$v / c =$

In[•]:=
```
SetPrecision[1 - 0.5 (1 / (2.5 × 10^6))^2, 25]
```

Out[•]= 0.9999999999999199529199245

Anmerkung

Häufiger ist die Fragestellung:

Entwickeln Sie die (sich aus der oben angegebenen Gleichung abgeleitete) Formel

$m\, c^2 = m_0\, c^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$

in eine Reihe für kleine v/c. Dies führt zur so genannten nicht-relativistischen Näherung mit den Termen

In[•]:=
```
Normal[Series[(1 - x^2)^(-1/2), {x, 0, 4}]] /. x → v / c
```

Out[•]= $1 + \frac{v^2}{2\, c^2} + \frac{3\, v^4}{8\, c^4}$

Out[•]= $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + O\left[\frac{v}{c}\right]^5$

und, nach Multiplikation mit $m_0\, c^2$ ergibt sich

$m\, c^2 = m_0\, c^2 + m_0\, v^2 / 2 + 3\, m_0\, v^4 / \left(8\, c^2\right) \; ...$

Dabei ist $m_0\, c^2$die so genannte Ruhemasse und $m_0\, v^2 / 2$ der bekannte Ausdruck für die nicht-relativistische Bewegungsenergie. Die weiteren Terme sind mit zusätzlichen Faktoren v^2 / c^2unterdrückt.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

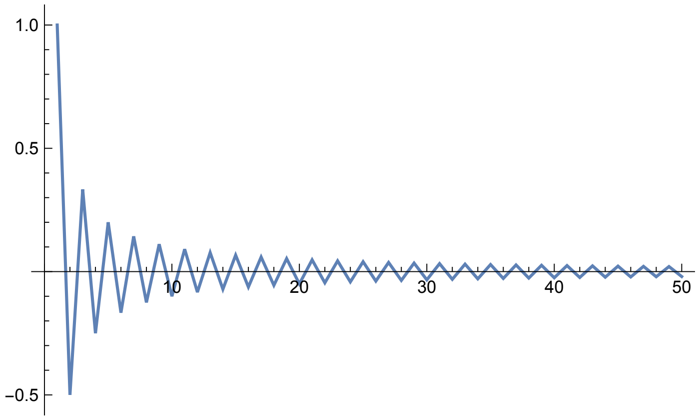
Alternierend harmonische Folge und Reihe

In[•]:=
```
Clear["Global`*"];
```

Die alternierend harmonische Reihe konvergiert. Wir berechnen zuerst die Folge.

In[•]:=
```
Folge = Table[{n, -(-1)^n/n}, {n,1,50}];
```

In[•]:=
```
ListPlot[Folge,PlotJoined->True,
PlotRange->All]
```

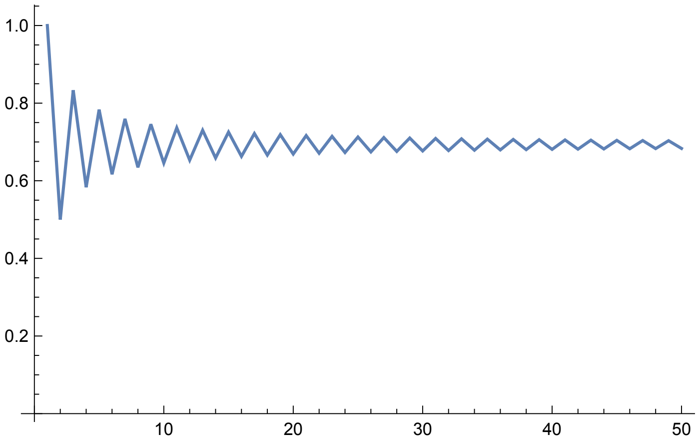
Out[•]=


Die Partialsumme definieren wir mit Hilfe einer Funktion:

In[•]:=
```
Partialsumme[n_] := Sum[Folge[[i,2]],{i,1,n}];
```

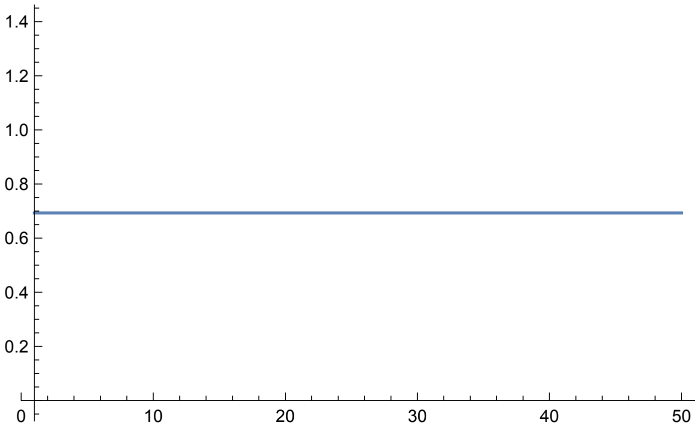
In[•]:=
```
PartialsummenFolge = Table[{n,Partialsumme[n]},{n,1,50}];
```

In[•]:=
```
PA = ListPlot[N[PartialsummenFolge], PlotJoined->True,PlotRange->All]
```

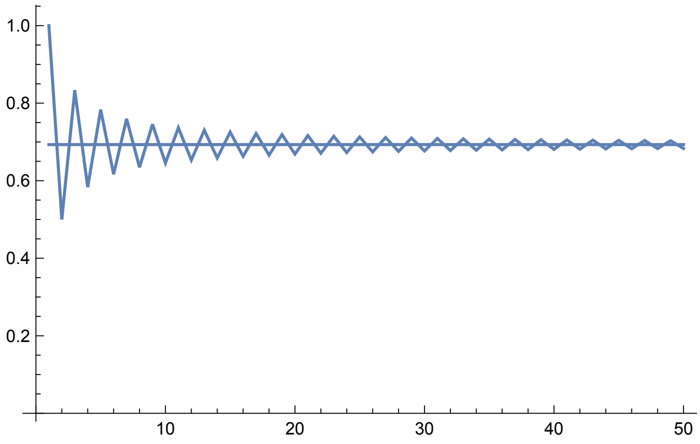
Out[•]=


Die Reihe konvergiert gegen den Wert ln(2), wie wir nun demonstrieren:

In[•]:=
```
PB=Plot[Log[2],{x,1,50},
DisplayFunction->Identity]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
Show[PA,PB]
```

Out[•]=


Feigenbaum-Folge

Diese Folge ist für manche Werte des Parameters α chaotisch.

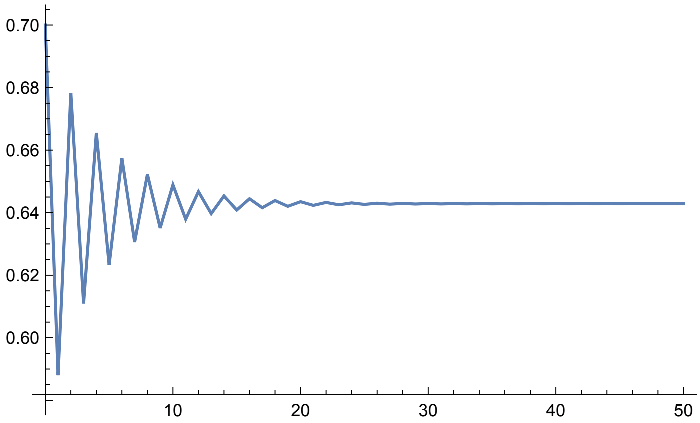
In[•]:=
```
Clear["Global`*"];
```

Die nachstehende Funktion berechnet jeweils aus dem aktuellen Wert des Folgengliedes das nächste. Das Argument ist der Kontrollparameter α.

In[•]:=
```
Iter[α_] := ( x = α x (1-x); Return[x] );
```

Für den Wert α=2.8 konvergiert die sich ergebende Folge gegen einen Grenzwert. Als Startwert nehmen wir x=0.5:

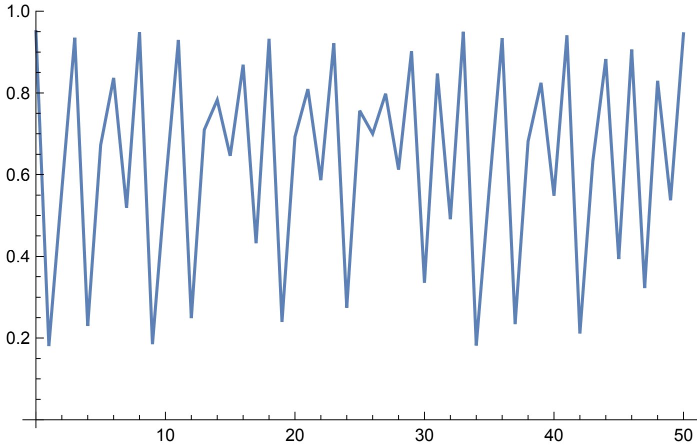
In[•]:=
```
x=0.5;
Folge = Table[{i, Iter[2.8]},{i,0,50}];
ListPlot[Folge,PlotJoined->True,
PlotRange->All]
```

Out[•]=


Für den Wert α=3.8 konvergiert die Folge nicht, sondern ist chaotisch:

In[∘]:=
```
x=0.5;
Folge = Table[{i, Iter[3.8]},{i,0,50}];
ListPlot[Folge,PlotJoined->True,
PlotRange->All]
```

Out[∘]=



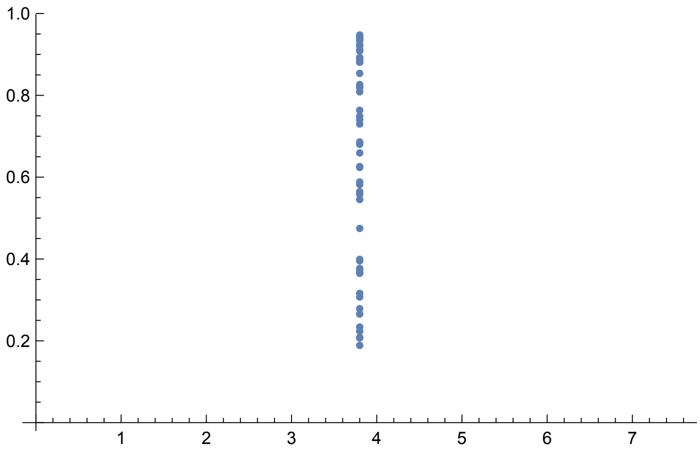
Nun berechnen wir für einen gegebenen Wert von α die Folgenglieder Nummer 201-250. Nach den ersten 200 Gliedern sollte sich entschieden haben, ob die Folge konvergent, zyklisch oder chaotisch ist.

In[∘]:=
```
FB[α_]:= ( (* Startwerte: *)
          x=0.5; λ=N[α];
          (* Voriteration: *)
          Do[Iter[λ],{i,1,200}];
          Return[Table[{λ,Iter[λ]},
          {i,1,50}] ])
```

Die sich ergebenden 50 Werte plotten wir als y-Koordinaten für festes x=α:

In[∘]:=
```
ListPlot[FB[3.8]]
```

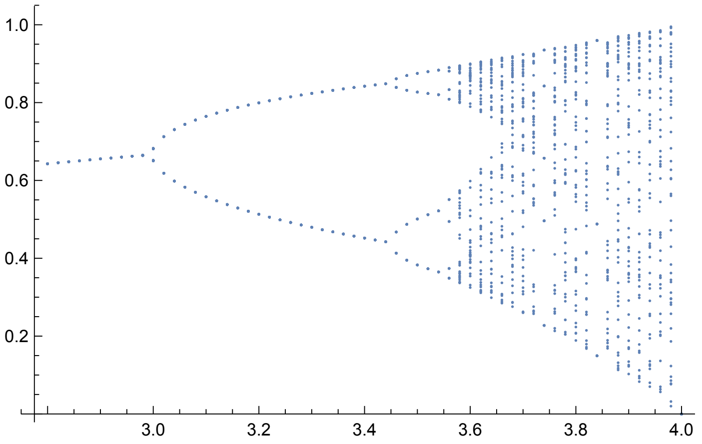
Out[∘]=



Schließlich wiederholen wir diese Rechnung für viele Werte des Kontrollparameters α und bekommen so die Information darüber, wo die Feigenbaum-Folge konvergent ist und wo nicht.

In[∘]:=
```
ListPlot[ Flatten[ Table[ FB[2.8+0.02*i],{i,0,60}]  ,1] ]
```

Out[∘]=



Potenzreihen

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"];
```

Wir betrachten als Beispiel die Sinus-Reihe. Das allgemeine Glied der Reihe ist:

In[∘]:= $A[k\_] := \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Die Partialsumme der Potenzreihe (ab dem 0-ten) bis zum k-ten Glied lautet:

In[∘]:=
```
PRSin[x_,n_] := Sum[A[k], {k,0,n}]
```

Die ersten 3 Terme sind zum Beispiel

In[∘]:=
```
PRSin[x,2]
```

Out[∘]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Wir hätten die Reihe übrigens auch mit der Mathematica Funktion Series bestimmen können:

In[∘]:=
```
Series[Sin[x], {x, 0, 5}]
```

Out[∘]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6$

Die ersten 10 Terme sind

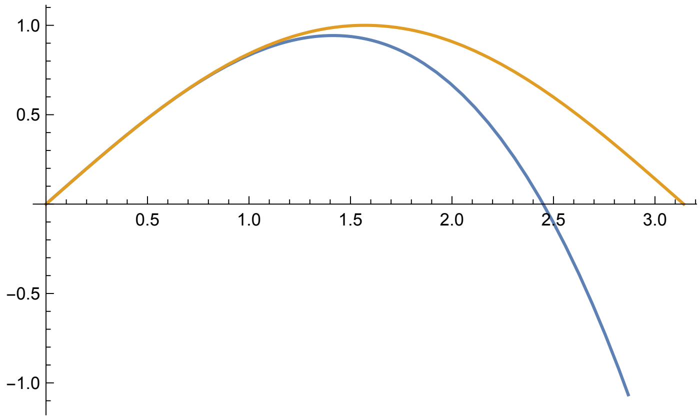
In[∘]:=
```
PRSin[x,10]
```

Out[∘]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362\,880} - \frac{x^{11}}{39\,916\,800} + \frac{x^{13}}{6\,227\,020\,800} - \frac{x^{15}}{1\,307\,674\,368\,000} + \frac{x^{17}}{355\,687\,428\,096\,000} - \frac{x^{19}}{121\,645\,100\,408\,832\,000} + \frac{x^{21}}{51\,090\,942\,171\,709\,440\,000}$

Wir vergleichen die ersten beiden Terme der Potenzreihe (PRSin[x,1]) mit der Funktion selbst:

In[•]:=
```
Plot[{PRSin[x,1],Sin[x]},{x,0,Pi}]
```

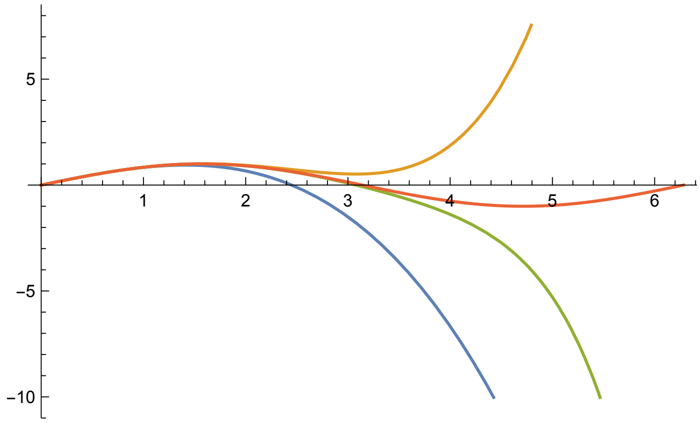
Out[•]=



Die Konvergenzeigenschaften hängen offenbar vom Abstand vom Entwicklungspunkt ab: je näher, desto schneller. Aber es gilt auch: je mehr Terme desto besser:

In[•]:=
```
Plot[{PRSin[x,1],PRSin[x,2],
PRSin[x,3],Sin[x]},{x,0,2 Pi}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```