Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 10. Elemente der Tensorrechnung

10.1

Wie lauten die Komponenten eines Tensors T=(t_{ij}), wenn gilt

$T\,\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i \; (i = 1, 2, 3)$,
wobei $\mathbf{a}_1 = (3, 4, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$
und $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 0)$?

Lösungsweg

Das Produkt mit den Einheitsvektoren blendet jeweils eine Spalte des Tensors heraus. Der Tensor hat also die Form

In[ ]:=
```
MatrixForm[{{3, 1, 2}, {4, 0, 1}, {1, 1, 0}}]
```
Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.2

Ein Tensor U=(u_ij) ist so zu bestimmen, dass U $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{c}_i$ gilt, mit $\boldsymbol{c}_1 = (3,0,-6)$, $\boldsymbol{c}_2 = (-9,0,-6)$, $\boldsymbol{c}_3 = (3,0,-3)$. Die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ sind dieselben wie im vorhergehenden Beispiel.

Lösungsweg

Wir schreiben die Aufgabe in Matrixform an:

In[∘]:=
```
Avecs = Transpose[{{3, 4, 1}, {1, 0, 1}, {2, 1, 0}}];
MatrixForm[Avecs]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
Cvecs = Transpose[{{3, 0, -6}, {-9, 0, -6}, {3, 0, -3}}];
MatrixForm[Cvecs]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Vektoren jeweils die Spalten. Die Aufgabe lautet nun, ein U derart zu finden, dass

```
U.Avecs = Cvecs
```

gilt. Die Lösung ist offenbar durch Multiplikation von 1/Avecs von rechts zu erreichen:

In[∘]:=
```
U = Cvecs.Inverse[Avecs]
```

Out[∘]=
```
{{0, 3, -9}, {0, 0, 0}, {-2, 1, -4}}
```

Der Tensor hat also die Form

In[∘]:=
```
MatrixForm[U]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass zur Bestimmung des Tensors zumindest drei unabhängige Vektoren a als Angabe notwendig waren, da sonst Avecs nicht invertierbar gewesen wäre!

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.3

Die beiden Vektoren $\mathbf{a} = (1,3,4)$ und $\mathbf{b} = (2,-1,-2)$ bilden mit Hilfe eines direkten Produktes $a_i\, b_j$ einen Tensor 2. Stufe. Zerlegen Sie den Tensor in den symmetrischen und antisymmetrischen Anteil.

Lösungsweg

```
In[•]:= a = {1, 3, 4};
        b = {2, -1, -2};
```

```
In[•]:= T = Table[a[[i]] × b[[j]], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]
Out[•]= {{2, -1, -2}, {6, -3, -6}, {8, -4, -8}}
```

Der symmetrische/antisymmetrische Anteil sind jeweils aus Summe/Differenz von T und dem transponierten T berechenbar. Das Ergebnis ist in Zeilen angegeben:

```
In[•]:= TSymm = (T + Transpose[T]) / 2
```

Out[•]= $\left\{\left\{2, \frac{5}{2}, 3\right\}, \left\{\frac{5}{2}, -3, -5\right\}, \{3, -5, -8\}\right\}$

```
In[•]:= TAntisymm = (T - Transpose[T]) / 2
```

Out[•]= $\left\{\left\{0, -\frac{7}{2}, -5\right\}, \left\{\frac{7}{2}, 0, -1\right\}, \{5, 1, 0\}\right\}$

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

10.4

Transformieren Sie den Tensor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α mit der x_3-Achse als Drehachse.

Lösungsweg

Die Drehmatrix ist

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\alpha] & \mathrm{Sin}[\alpha] & 0 \\ -\mathrm{Sin}[\alpha] & \mathrm{Cos}[\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[•]:= R = {{Cos[α], Sin[α], 0},
            {-Sin[α], Cos[α], 0}, {0, 0, 1}};
```

Der Tensor hat die Form

```
In[•]:= T = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};
```

Die Drehung ergibt sich durch

```
In[•]:= Simplify[R.T.Inverse[R]]
```

Out[•]= $\{\{\mathrm{Cos}[\alpha]^2, -\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\alpha], \mathrm{Sin}[\alpha]\},$
$\{-\mathrm{Cos}[\alpha]\,\mathrm{Sin}[\alpha], \mathrm{Sin}[\alpha]^2, \mathrm{Cos}[\alpha]\}, \{\mathrm{Sin}[\alpha], \mathrm{Cos}[\alpha], 0\}\}$

$\{\{\text{Cos}[\alpha]^2, -\text{Cos}[\alpha]\,\text{Sin}[\alpha], \text{Sin}[\alpha]\},$
$\{-\text{Cos}[\alpha]\,\text{Sin}[\alpha], \text{Sin}[\alpha]^2, \text{Cos}[\alpha]\},$
$\{\text{Sin}[\alpha], \text{Cos}[\alpha], 0\}\}$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.5

Die kartesischen Einheitsvektoren werden durch eine Drehung des Koordinatensystems in die Vektoren

$a_1 = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)$

$a_2 = (\cos\vartheta\cos\varphi,\ \cos\vartheta\sin\varphi,\ -\sin\vartheta)$

$a_3 = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$

übergeführt. Wie lautet die Drehmatrix? Transformieren Sie den Tensor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

entsprechend dieser Drehung für $\vartheta = \varphi = \pi/4$.

Lösungsweg

Die Drehung eines Vektor wird durch die Matrixmultiplikation

x' = R.**x**

beschrieben. In unserem Beispiel ist **x** jeweils einer der drei kartesischen Einheitsvektoren und der gedrehte Vektor ist **a**. Die drei Vektoren **a** sind also einfach die Spalten der Matrix R.

In[∘]:=
```
R = Transpose[{{Sin[th] Cos[phi], Sin[th] Sin[phi], Cos[th]},
   {Cos[th] Cos[phi], Cos[th] Sin[phi], -Sin[th]}, {-Sin[phi], Cos[phi], 0}}]
```

Out[∘]=
```
{{Cos[phi] Sin[th], Cos[phi] Cos[th], -Sin[phi]},
 {Sin[phi] Sin[th], Cos[th] Sin[phi], Cos[phi]}, {Cos[th], -Sin[th], 0}}
```

Wir überprüfen, ob R eine Drehmatrix (also orthogonal) ist:

In[∘]:=
```
Simplify[R.Transpose[R]]
```

Out[∘]=
```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Ja, R transponiert ist gleich 1/R, wie gefordert.

Die Drehmatrix für th=phi=π/4 lautet

In[∘]:=
```
RMat = R /. {phi -> Pi/4, th -> Pi/4}
```

Out[∘]=
$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right\}$$

Der Tensor T ist laut Angabe

In[∘]:=
```
T = {{2, 1, 0}, {1, -3, -1}, {0, -1, 2}};
```

und die Drehung transformiert ihn wie folgt:

In[•]:=
```
Tneu = Simplify[ RMat.T.Transpose[RMat]]
```

Out[•]= $\left\{\left\{\frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\left(-2+5\sqrt{2}\right)\right\}, \left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\left(2+5\sqrt{2}\right)\right\}, \left\{\frac{1}{4}\left(-2+5\sqrt{2}\right), \frac{1}{4}\left(2+5\sqrt{2}\right), -\frac{3}{2}\right\}\right\}$

In[•]:=
```
Print[MatrixForm[Tneu]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\left(-2+5\sqrt{2}\right) \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4}\left(2+5\sqrt{2}\right) \\ \frac{1}{4}\left(-2+5\sqrt{2}\right) & \frac{1}{4}\left(2+5\sqrt{2}\right) & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

In[•]:=
```
Print[MatrixForm[N[Tneu]]]
```

$$\begin{pmatrix} 1.95711 & -0.75 & 1.26777 \\ -0.75 & 0.542893 & 2.26777 \\ 1.26777 & 2.26777 & -1.5 \end{pmatrix}$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.6

Durch Rotation eines Kreises vom Durchmesser 2 a um eine seiner Tangenten entsteht eine Rotationsfläche.

Der Innenraum dieses Rotationskörpers sei homogen massiv. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment dieses Körpers bezogen auf die Drehachse.

Lösungsweg

Wir müssen uns zuerst für das Koordinatensystem entscheiden, in dem wir arbeiten wollen. Die Tangente soll die z-Achse sein. Der Kreis hat also im kartesischen System (zum Beispiel in der x-z-Ebene) die Lage:
Mittelpunkt bei x=a, z=0, Radius=a.

Die Kreisgleichung lautet

$(-a+x)^2+z^2 == a^2$

In[•]:=
```
Simplify[Expand[(x - a) ^2 + z^2 == a^2]]
```

Out[•]= $2\,a\,x == x^2+z^2$

In Kugelkoordinaten (einstweilen sei phi=0) ist das

In[•]:=
```
Gleichung = Simplify[-2 a x + x^2 + z^2 == 0 /.
    {x -> r Sin[th] , z -> r Cos[th]}]
```

Out[•]= $r^2 == 2\,a\,r\,\mathrm{Sin}[th]$

Wir lösen diese Gleichung nach r auf, da wir dies für die Beschreibung der Fläche brauchen:

In[•]:= `Solve[Gleichung, r]`

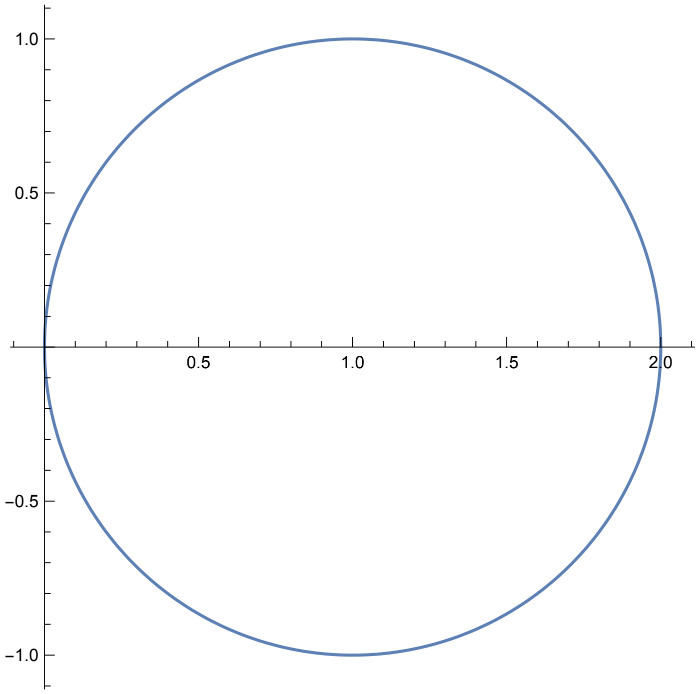
Out[•]= `{{r → 0}, {r → 2 a Sin[th]}}`

Auf dem Kreis ist der Radius also 2 a Sin[th].

Damit können wir den Kreis in dieser Parametrisierung zeichnen, um unsere Ergebnis zu überprüfen (a=1):

In[•]:=
```
ParametricPlot[{2 Sin[th] Sin[th], 2 Sin[th] Cos[th]},
 {th, 0, Pi}, AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=



Damit wissen wir auch, wie die Oberfläche des Drehkörpers in Kugelkoordinaten,

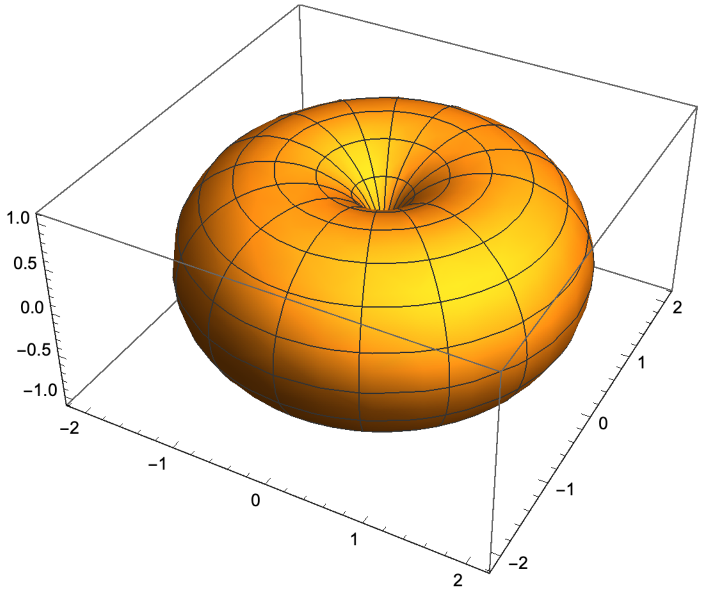
`x = r Sin[th] Cos[phi]`
`y = r Sin[th] Sin[phi]`
`z = r Cos[th]`

zu parametrisieren ist:

`0 < th < Pi, 0 < phi < 2 Pi, 0 < r < a Sin[th].`

Es handelt sich also (für a=1) um einen Torus folgenden Aussehens (auf der Oberfläche ist r= 2 a Sin[th]):

In[•]:=
```
ParametricPlot3D[{2 Sin[th]^2 Cos[phi],
        2 Sin[th]^2 Sin[phi], 2 Sin[th] Cos[th]},
    {phi, 0, 2 Pi}, {th, 0, Pi}]
```

Out[•]=


Das Differenzial des Trägheitsmoments um die z-Achse ist

$$\begin{aligned} dI &= \rho\,(x^2 + y^2)\,dV \\ &= \rho\, r^2 \,\mathrm{Sin}[\vartheta]^2\, dV \\ &= \rho\, r^2 \,\mathrm{Sin}[\vartheta]^2\, r^2 \,\mathrm{Sin}[\vartheta]\, d\vartheta\, dr\, d\varphi \\ &= \rho\, r^4 \,\mathrm{Sin}[\vartheta]^3\, d\vartheta\, dr\, d\varphi \end{aligned}$$

Die Volumenintegration ergibt damit

In[•]:=
```
Trägheitsmoment = ρ Integrate[
             Integrate[r^4 Sin[th]^3 ,
                 {phi, 0, 2 Pi}, {r, 0, 2 a Sin[th]}],
             {th, 0, Pi}]
```

Out[•]= $\frac{7}{2} a^5 \pi^2 \rho$

Die Masse wäre übrigens

In[•]:=
```
Masse = ρ Integrate[
             Integrate[r^2 Sin[th],
                 {phi, 0, 2 Pi}, {r, 0, 2 a Sin[th]}],
             {th, 0, Pi}]
```

Out[•]= $2 a^3 \pi^2 \rho$

Damit kann das Trägheitsmoment auch als 7 a^2 M / 4 geschrieben werden.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.7

Man bestimme den Trägheitstensor eines Vollzylinders mit der x_3-Achse als Zylinderachse, der Höhe h über der (x_1,x_2)-Ebene, dem Radius R und konstanter Massendichte ρ

Lösungsweg

Die Integrationsgrenzen in Zylinderkoordinaten sind

$0 \leq r \leq R,\quad 0 \leq z \leq h,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

und die Integration ergibt (Integrationsdifferenzial r dr dφ dz) die Masse

In[•]:=
```
M = Integrate[ρ r, {r, 0, R}, {z, 0, h}, {φ, 0, 2 π}]
```

Out[•]= $h \pi R^2 \rho$

was uns nicht überrascht. Weiters ist

In[•]:=
```
x = r Cos[φ]
y = r Sin[φ]
```

Out[•]= $r \operatorname{Cos}[\varphi]$

Out[•]= $r \operatorname{Sin}[\varphi]$

und die diagonalen Komponenten des Trägheitstensors daher

In[•]:=
```
Ixx = Integrate[ρ r (y^2 + z^2), {r, 0, R}, {z, 0, h}, {φ, 0, 2 π}]
Iyy = Integrate[ρ r (x^2 + z^2), {r, 0, R}, {z, 0, h}, {φ, 0, 2 π}]
Izz = Integrate[ρ r (x^2 + y^2), {r, 0, R}, {z, 0, h}, {φ, 0, 2 π}]
```

Out[•]= $\frac{1}{12} h \pi R^2 \left(4 h^2 + 3 R^2\right) \rho$

Out[•]= $\frac{1}{12} h \pi R^2 \left(4 h^2 + 3 R^2\right) \rho$

Out[•]= $\frac{1}{2} h \pi R^4 \rho$

Da wir das Ergebnis als Vielfaches der Gesamtmasse M ausdrücken wollen, berechnen wir noch

In[•]:=
```
Simplify[Ixx / M]
Simplify[Iyy / M]
Simplify[Izz / M]
```

Out[•]= $\frac{h^2}{3} + \frac{R^2}{4}$

Out[•]= $\frac{h^2}{3} + \frac{R^2}{4}$

Out[•]= $\frac{R^2}{2}$

Das ist das Endergebnis, da die nichtdiagonalen Werte aus Symmetriegründen verschwinden. Um das zu sehen, berechnen wir zum Beispiel

In[•]:=
```
x y
x z
y z
```

Out[•]= $r^2 \mathrm{Cos}[\varphi]\, \mathrm{Sin}[\varphi]$

Out[•]= $r\, z\, \mathrm{Cos}[\varphi]$

Out[•]= $r\, z\, \mathrm{Sin}[\varphi]$

Der erste Term ist identisch mit $r^2\, \mathrm{Sin}[2\, \varphi]/2$.
Bei der Winkelintegration verschwinden alle diese Beiträge.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.8

Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Drehachse durch den Ursprung als Summe von M $(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})^2$ (Gesamtmasse M, Abstandsvektor des Schwerpunkts vom Ursprung **R**) und dem Trägheitsmoment des Körpers um eine parallele Drehachse durch seinen Schwerpunkt gegeben ist.

Lösungsweg

Die Schwerpunktskoordinaten sind

$$R = \int_V d^3 x\ \rho\ (\mathbf{x})\ \mathbf{x}$$

und die Masse des Körpers ist

$$M = \int_V d^3 x\ \rho\ (\mathbf{x})\ .$$

Der Normalabstand eines Punktes **x** von einer Drehachse durch den Ursprung in Richtung des Einheitsvektors **n** ist **x**×**n**, das Trägheitsmoment um diese Achse daher

$$I = \int_V d^3 x\ \ \rho\ (\mathbf{x})\ \ (\mathbf{x} \times \mathbf{n})\ \cdot\ (\mathbf{x} \times \mathbf{n})\ .$$

Man kann das Quadrat des Normalabstands übrigens auch umschreiben. Allgemein ist (vgl. auch Pythagoras!)

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\ .\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= a^2\, b^2\ (\sin\gamma)^2 \\ &= a^2\, b^2\ - a^2\, b^2\ (\cos\gamma)^2 \\ &= a^2\, b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\end{aligned}$$

also hier $(\mathbf{x}\times\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{x}\times\mathbf{n}) = x^2 - (\mathbf{x}\ .\ \mathbf{n}\ )^2$.

Wir führen eine Variablentransformation $\mathbf{x} = \mathbf{R} + \mathbf{x}'$ durch, damit wird $d^3\ x \to d^3\ x'$ und

Das Trägheitsmoment ist damit

$$I = \int_V d^3 x'\ \ \rho\ (\mathbf{R} + \mathbf{x}')$$

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{n} + \mathbf{x}' \times \mathbf{n})\ \cdot\ (\mathbf{R} \times \mathbf{n} + \mathbf{x}' \times \mathbf{n})\ =$$

$$\int_V d^3 x'\ \ \rho\ (\mathbf{R} + \mathbf{x}')$$

$$[\ (\mathbf{R} \times \mathbf{n})\ .\ (\mathbf{R} \times \mathbf{n})$$

$$+2\,(\mathbf{R}\times\mathbf{n})\,.\,(\mathbf{x'}\times\mathbf{n})$$
$$+\,(\mathbf{x'}\times\mathbf{n})\,.\,(\mathbf{x'}\times\mathbf{n})\,]\;=$$
$$M\,(\mathbf{R}\times\mathbf{n})^2+0+I_0$$

Dabei haben wir festgestellt, dass der mittlere Ausdruck verschwindet, da nach der Definition des Schwerpunkts

$$\int_V d^3x'\;\rho\,(\mathbf{R}+\mathbf{x'})\;\mathbf{x'}=0$$

ist. Der dritte Ausdruck ist genau das Trägheitsmoment des Körpers um eine Achse der Richtung n durch den Schwerpunkt. Damit ist der gesuchte Beweis erbracht.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

10.9

Leiten Sie die Beziehungen (M7.2.1) mit Hilfe der Darstellung mittels ϵ-Tensor ab.

Lösungsweg

Der Epsilon-Tensor erlaubt eine elegante Tensordarstellung des äußeren Produkts:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k=\epsilon_{ijk}\,a_i\,b_j\;.$$

Wir beweisen damit diejenigen Beziehungen in (M 7.2.1), in denen äußere Produkte vorkommen.

(b) $\nabla\times(\Phi\,\mathbf{F})=\nabla\,\Phi\times\mathbf{F}+\Phi\,\nabla\times\mathbf{F}$

$$(\nabla\times(\Phi\,\mathbf{F}))_k=\epsilon_{ijk}\,\partial_i\,(\Phi\,\mathbf{F}_j)$$
$$=\epsilon_{ijk}\,(\partial_i\Phi)\,\mathbf{F}_j+\Phi\,\partial_i\,\mathbf{F}_j)$$
$$=\nabla\,\Phi\times\mathbf{F}+\Phi\,\nabla\times\mathbf{F}$$

(c) $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\epsilon_{ijk}\,\partial_k\,(F_i\,G_j)$$
$$=\epsilon_{ijk}\,(\partial_k F_i)\,G_j+\epsilon_{ijk}\,F_i\,(\partial_k G_j)$$
$$=(\epsilon_{kij}\,\partial_k F_i)\,G_j-F_i\,(\epsilon_{kji}\,\partial_k G_j)$$
$$=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$$

(d) $\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{F}\,(\nabla\cdot\mathbf{G})-\mathbf{G}\,(\nabla\cdot\mathbf{F})+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G}$

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\epsilon_{ijk}\,\partial_i\,(\epsilon_{lmj}\,F_l\,G_m)$$
$$=\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmj}\,[(\partial_i F_l)\,G_m+F_l\,(\partial_i G_m)]$$

Mittels der Beziehung (10.38)finden wir

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmj}=\epsilon_{kij}\,\epsilon_{lmj}=\delta_{kl}\,\delta_{im}-\delta_{km}\,\delta_{il}$$

und daraus

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmj}\,[(\partial_i F_l)\,G_m+F_l\,(\partial_i G_m)]=$$
$$[\delta_{kl}\,\delta_{im}-\delta_{km}\,\delta_{il}]\,[(\partial_i F_l)\,G_m+F_l\,(\partial_i G_m)]$$
$$=(\partial_i F_k)\,G_i-(\partial_i F_i)\,G_k$$
$$+F_k\,(\partial_i G_i)-F_i\,(\partial_i G_k)$$
$$=F_k\,(\partial_i G_i)-(\partial_i F_i)\,G_k$$
$$+G_i\,(\partial_i F_k)-F_i\,(\partial_i G_k)$$

$$= \mathbf{F}\,(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}\,(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\,\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\,\mathbf{G}$$

(e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \Delta\,\mathbf{G}$

Dies ergibt sich aus (d), wenn man berücksichtigt, dass die zwei Terme $-\mathrm{G}\,(\nabla \cdot \nabla) + (\mathrm{G} \cdot \nabla)\,\nabla$ keinen Beitrag liefern.

In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```