

# Mathematische Methoden in der Physik

## Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa `Limit` oder `Series`) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

## Kapitel 11. Ein wenig Differenzialformen

### 11.1

Die Basis einer äußeren Algebra sei  $\{a, b\}$ . Was ergibt die Reihenentwicklung von  $\exp(a+2b)$ ?

#### Lösungsweg

Die Exponentialfunktion ist durch ihre Reihenentwicklung definiert und daher

$$\begin{aligned}\exp(a+2b) &= 1 + (a+2b) + \frac{(a+2b)^2}{2} + \frac{(a+2b)^3}{6} + \dots \\ &= 1 + a + 2b + \frac{(aa + 2ab + 2ba + 4bb)}{2} + \dots \\ &= 1 + a + 2b + (ab + ba) + \dots = 1 + a + 2b\end{aligned}$$

da  $ab=-ba$  und  $aa=bb=0$ . Auch alle Terme dritter und höherer Ordnung verschwinden. Das allgemeine Element der Algebra hat die Form  $c_1 + c_2 a + c_3 b + c_4 ab$ .

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

### 11.2

Zeigen Sie mit Hilfe äußerer Formen für quadratische Matrizen  $|AB|=|A||B|$ .

#### Lösungsweg

Die Matrizen seien  $n \times n$  Matrizen. Für die äußere  $n$ -Form  $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  ( $x$  ist ein  $n$ -Vektor) gilt

$$d(Ax) = |A| dx$$

und daher einerseits

$$d(ABx) = |AB| dx$$

und andererseits

$$d(ABx) = |A| d(Bx) = |A| |B| dx$$

und daher  $|AB|=|A||B|$ .

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

## 11.3

Zeigen Sie mit Hilfe äußerer Formen, dass im  $\mathbb{R}^n$  das Gaußsche Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(-x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} x) = \pi^{n/2} / |\mathbf{A}|$$

ergibt (Annahme:  $\mathbf{A}$  ist nicht singulär)!

### Lösungsweg

Volumenelemente  $d^n x$  sind n-Formen und daher

$$d(Ax) = |A| dx$$

Wir führen eine Variablentransformation durch:

$$y = Ax, \quad dy = |A| dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(-x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} x) &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\mathbb{R}^n} d^n y \exp(-y^T y) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} dy_i \exp(-y_i^2) = \frac{\pi^{n/2}}{|\mathbf{A}|} \end{aligned}$$

wie zu zeigen war.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

## 11.4

Betrachten Sie p-Formen im  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Wie viele unabhängige Basiselemente gibt es für  $p=0, 1, 2, 3, 4$ ?

(b) Tabellieren Sie die Wirkung des äußeren Differenzialoperators  $d$ , wie er in diesem Kapitel definiert ist, auf alle diese p-Formen.

### Lösungsweg

(a)

Die Basiselemente sind  $dx_1, dx_2, dx_3$  und  $dx_4$ ,

Das allgemeine Element der Algebra ist eine Summe von 0-, 1-, 2-, 3- und 4- Formen, die jeweils folgende Basiselemente haben (wir geben dabei das Wedge-Zeichen nicht ausdrücklich an):

0 – Form : 1

1 – Form :  $dx_1, dx_2, dx_3$  und  $dx_4$

2 – Form :  $dx_1 dx_2, dx_1 dx_3, dx_1 dx_4, dx_2 dx_3, dx_2 dx_4, dx_3 dx_4$

3 – Form :  $dx_1 dx_2 dx_3, dx_1 dx_2 dx_4, dx_1 dx_3 dx_4, dx_2 dx_3 dx_4$

4 – Form :  $d x_1 d x_2 d x_3 d x_4$

**(b)**

0 – Form : zum Beispiel  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  :

$$df = \partial_{x_1} f dx_1 + \partial_{x_2} f dx_2 + \partial_{x_3} f dx_3 + \partial_{x_4} f dx_4$$

1 – Form : zum Beispiel  $g = f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1$

$$dg = -(\partial_{x_2} f) dx_1 dx_2 - (\partial_{x_3} f) dx_1 dx_3 - (\partial_{x_4} f) dx_1 dx_4$$

2 – Form : zum Beispiel  $g = f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 \times$

$$\begin{aligned} dg &= (\partial_{x_3} f) dx_3 dx_1 dx_2 + (\partial_{x_4} f) dx_4 dx_1 dx_2 \\ &= (\partial_{x_3} f) dx_1 dx_2 dx_3 + (\partial_{x_4} f) dx_1 dx_2 dx_4 \end{aligned}$$

3 – Form : zum Beispiel  $g = f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 \times$

$$dg = (\partial_{x_4} f) dx_4 dx_1 dx_2 dx_3 = -(\partial_{x_4} f) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

4 – Form :  $g = f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \times$

$$dg = 0$$

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

## 11.5

Zerlegen Sie einen Würfel  $W$  in 3-Simplizes. Zeigen Sie, dass  $\partial\partial W=0$  gilt.

### Lösungsweg

Es gibt viele denkbare Zerlegungen in 3-Simplizes.

Eine symmetrische Variante ist, den Mittelpunkt  $M$  mit allen 8 Eckpunkten  $A, B, C, D, E, F, G, H$  zu verbinden; so erhält man zuerst 6 Pyramiden (jeweils mit Mittelpunkt als Spitze und einer Würfel-  
fläche als Grundfläche).

$MABCD, MBCGF, MCGHD, MDHEA, MEABF, MEFGH$

Diese teilt man dann in zwei gleich große 3-Simplizes. Insgesamt erhält man so 12 Simplizes:

$MABD, MBCD, MBCF, MCGF, MCGD, MGHD, MDHA, MHEA, MEAF, MABF, MEFH, MFGH$

Es ist (nach 11.26)

$$\partial(MABD) = (ABD) - (MBD) + (MAD) - (MAB)$$

Man kann das natürlich per Hand auswerten. Da wir faul sind, verwenden wir entsprechend (11.26) folgende Mathematica Definitionen::

$\partial(3\text{-Simplex})$ :

`In[ ]:= B4[a_, b_, c_, d_] := B3[b, c, d] - B3[a, c, d] + B3[a, b, d] - B3[a, b, c];`

Für jeden der Simplizes gilt

```
In[*]:= B4[M, A, B, D]
```

```
Out[*]:= B3[A, B, D] - B3[M, A, B] + B3[M, A, D] - B3[M, B, D]
```

und

$\partial(2\text{-Simplex})$ :

```
In[*]:= B3[a_, b_, c_] := B2[b, c] - B2[a, c] + B2[a, b];
```

Daher

```
In[*]:= B4[M, A, B, D]
```

```
Out[*]:= 0
```

Entsprechendes gilt für alle Simplexes. Damit ist der Beweis geführt.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

## 11.6

In  $R^2$  sei ein Potenzial  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ . Berechnen Sie die Komponenten der 1-Form (Kraft)  $F = -dV$  und daraus  $dF$ . Begründen Sie das Ergebnis.

### Lösungsweg

$$-dV(\mathbf{x}) = -d(x_1^2 + x_2^2) = -2x_1 dx_1 - 2x_2 dx_2$$

Das entspricht  $-\text{grad } V = (-2x_1, -2x_2) = -2\mathbf{r}$ , also jeweils zum Zentrum gerichteter Kraft.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d(-2x_1 dx_1 - 2x_2 dx_2) &= \\ -2d(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) &= -2(\partial_{x_2} x_1) dx_2 dx_1 - 2(\partial_{x_1} x_2) dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

## 11.7

Wir schreiben das Vektorpotenzial der Elektrodynamik als 1-Form  $A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ . Berechnen Sie die Komponenten des Magnetfeldes (2-Form) mittels  $B = dA$ , und zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass  $dB = 0$ .

### Lösungsweg

Wir bilden zunächst

$$\begin{aligned} B &= d(A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3) \\ &= (\partial_{x_2} A_1) dx_2 dx_1 + (\partial_{x_3} A_1) dx_3 dx_1 + (\partial_{x_1} A_2) dx_1 dx_2 + (\partial_{x_3} A_2) dx_3 dx_2 + (\partial_{x_2} A_3) dx_2 dx_3 + (\partial_{x_1} A_3) dx_1 dx_3 \\ &= ((\partial_{x_1} A_2) - (\partial_{x_2} A_1)) dx_1 dx_2 + ((\partial_{x_2} A_3) - (\partial_{x_3} A_2)) dx_2 dx_3 + ((\partial_{x_1} A_3) - (\partial_{x_3} A_1)) dx_1 dx_3 \end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} dB &= \partial_{x_3} ((\partial_{x_1} A_2) - (\partial_{x_2} A_1)) dx_3 dx_1 dx_2 + \\ &\quad \partial_{x_1} ((\partial_{x_2} A_3) - (\partial_{x_3} A_2)) dx_1 dx_2 dx_3 + \partial_{x_2} ((\partial_{x_1} A_3) - (\partial_{x_3} A_1)) dx_2 dx_1 dx_3 \\ &= [(\partial_{x_3} \partial_{x_1} A_2) - (\partial_{x_3} \partial_{x_2} A_1) + (\partial_{x_1} \partial_{x_2} A_3) - (\partial_{x_1} \partial_{x_3} A_2) - (\partial_{x_2} \partial_{x_1} A_3) + (\partial_{x_2} \partial_{x_3} A_1)] \\ &\quad dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

=  
0

...wie es zu zeigen war.

In[ ]:= ClearAll["Global`\*"];

## 11.8

Berechnen Sie das äußere Produkt  $dx \wedge dy \wedge dz \in L^3$  (Basiselemente  $dr, d\vartheta, d\varphi$ ) der drei Vektoren

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

### Lösungsweg

#### Untertitel

Wir bilden laut Vorschrift

$$dx = \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi$$

$$dz = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta$$

Multiplikation unter Berücksichtigung der Reihenfolge und dass Terme wie  $dr \wedge dr$  etc. nicht beitragen können, ergibt sich

$$dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \cos \varphi r \sin \vartheta \cos \varphi r (-\sin \vartheta) dr \wedge d\varphi \wedge d\vartheta \\ & + r \cos \vartheta \cos \varphi r \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi \wedge dr \\ & - r \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta \sin \varphi r (-\sin \vartheta) d\varphi \wedge dr \wedge d\vartheta \\ & - r \sin \vartheta \sin \varphi r \cos \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta \wedge dr \\ & = [r^2 (\sin \vartheta)^3 (\cos \varphi)^2 + r^2 (\cos \vartheta)^2 (\cos \varphi)^2 \sin \vartheta + \\ & \quad r^2 (\sin \vartheta)^3 (\sin \varphi)^2 + r^2 \sin \vartheta (\sin \varphi)^2 (\cos \vartheta)^2] dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ & = [r^2 (\cos \varphi)^2 \sin \vartheta + r^2 \sin \vartheta (\sin \varphi)^2] dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ & = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Der Vorfaktor ist die bekannte Jacobi-Determinante!

In[ ]:= ClearAll["Global`\*"];

## 11.9

Berechnen Sie das Integral  $\int F$  über das elektromagnetische Feld  $F = B_1 dy \wedge dz$  durch die Oberfläche einer Kugel (Radius  $R$ ) im Bereich  $0 < \vartheta < \pi/2, 0 < \varphi < \pi/2$  (also ein Achtel der Oberfläche)).

### Lösungsweg

Wir wollen laut Aufgabenstellung das Integral berechnen:

$$\int B_1 dy \wedge dz$$

Da Integral geht dabei über die Oberfläche einer Achtelkugel:

$$0 < \vartheta < \pi / 2, \quad 0 < \varphi < \pi / 2$$

Wir gehen zu Kugelkoordinaten über:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$dx = \sin \vartheta \cos \varphi dr + r \cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi$$

$$dy = \sin \vartheta \sin \varphi dr + r \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi$$

$$dz = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta$$

Da auf der Integrationsfläche  $r$  konstant ist, können wir  $r=R$  und  $dr=0$  setzen.

$$dy \wedge dz =$$

$$(R \cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + R \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi) \wedge (-R \sin \vartheta d\vartheta) = R^2 (\sin \vartheta)^2 \cos \varphi d\vartheta \wedge d\varphi$$

Das Integral über die Oberfläche wird daher

$$= B_1 R^2 \left( \int_0^{\pi/2} (\sin \vartheta)^2 d\vartheta \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right)$$

$$= B_1 R^2 \left( \frac{\pi}{4} \right) (1) = B_1 R^2 \frac{\pi}{4}$$

In[ ]:= `ClearAll["Global`*"];`