Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 13. Fourierreihe

13.1

Berechnen Sie die Fourierreihe für $x \in (-\pi, \pi)$ für folgende in diesem Bereich gegebene, periodische Funktionen:

(a) $f(x) = (\cos(x))^2$,

(b) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$,

(c) $f(x) = e^x$.

Lösungsweg

(a)

Die Funktion ist im gegebenen Intervall gerade, es tragen also nur die geraden Terme der Fourierreihe bei.

Wenn wir formal vorgehen, dann müssten wir daher die Koeffizienten wie folgt bestimmen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n\,x)\ (\cos(x))^2$$

Das geht hier vermutlich am besten in Exponentialdarstellung oder mittels Umformung mit Additionstheoremen. Wir ersparen uns das durch Nachdenken. Es ist ja

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}\left((\cos x)^2 + 1 - (\sin x)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\,x)$$

und das ist schon die Fourierreihe, mehr Terme gibt es nicht (Eindeutigkeit!). Die nichtverschwinden- den Koeffizienten (entsprechend unserer Konvention (13.4)) sind damit

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2.}$$

(b)

Auch in diesem Fall brauchen wir nicht zu integrieren, um die Fourierreihe zu finden:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \,.$$

Das ist schon die Reihe ($a_1 = 1$).

(c)

Für die Funktion

In[•]:= $f(x) = e^x$

tragen sowohl gerade als auch ungerade Terme der Fourierreihe bei.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos(n\,x)\, e^x$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{x\,(1+i n)} + e^{x\,(1-i n)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{e^{x\,(1+i n)}}{1+i n} + \frac{e^{x\,(1-i n)}}{1-i n}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{e^{\pi}\,(-1)^n}{1+i n} + \frac{e^{\pi}\,(-1)^n}{1-i n} - \frac{e^{-\pi}\,(-1)^n}{1+i n} - \frac{e^{-\pi}\,(-1)^n}{1-i n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sinh\pi\left(\frac{1}{1+i n} + \frac{1}{1-i n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\,(-1)^n\,\frac{\sinh\pi}{1+n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin(n\,x)\, e^x$$

$$= \frac{1}{2\,i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(e^{x\,(1+i n)} - e^{x\,(1-i n)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\,i\pi}\left(\frac{e^{x\,(1+i n)}}{1+i n} - \frac{e^{x\,(1-i n)}}{1-i n}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\,i\pi}\left(\frac{e^{\pi}\,(-1)^n}{1+i n} - \frac{e^{\pi}\,(-1)^n}{1-i n} - \frac{e^{-\pi}\,(-1)^n}{1+i n} + \frac{e^{-\pi}\,(-1)^n}{1-i n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{i\pi}\sinh\pi\left(\frac{1}{1+i n} - \frac{1}{1-i n}\right)$$

$$= \frac{2\,n}{\pi}\,(-1)^{n+1}\,\frac{\sinh\pi}{1+n^2}$$

Wie gut konvergiert die Reihe? Wir vergleichen die Terme bis zu n=05 mit der Funktion:

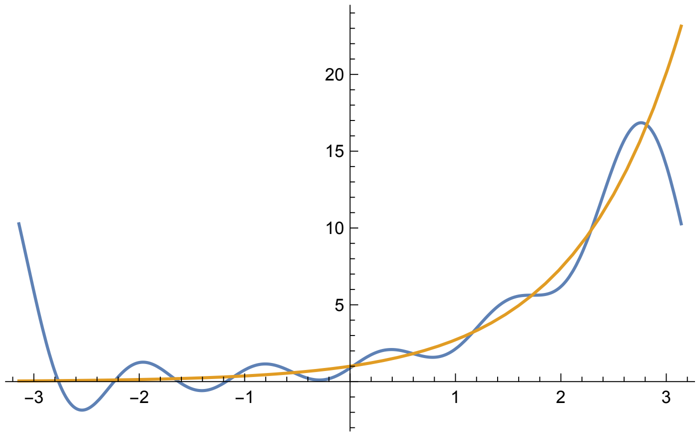
In[•]:=
```
FR5[x_] = FourierTrigSeries[Exp[x], x, 5]
```

Out[•]=

$$-\frac{\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{5\,\pi}-\frac{\mathrm{Cos}[3\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{5\,\pi}+\frac{2\,\mathrm{Cos}[4\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{17\,\pi}-\frac{\mathrm{Cos}[5\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{13\,\pi}+\frac{\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{\pi}-\frac{4\,\mathrm{Sin}[2\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{5\,\pi}+\frac{3\,\mathrm{Sin}[3\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{5\,\pi}-\frac{8\,\mathrm{Sin}[4\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{17\,\pi}+\frac{5\,\mathrm{Sin}[5\,x]\,\mathrm{Sinh}[\pi]}{13\,\pi}+\frac{e^{\pi}-\mathrm{Cosh}[\pi]+\mathrm{Sinh}[\pi]}{2\,\pi}$$

In[•]:=
```
Plot[{FR5[x], Exp[x]},
    {x, -π, π}, PlotRange -> All]
```

Out[•]=

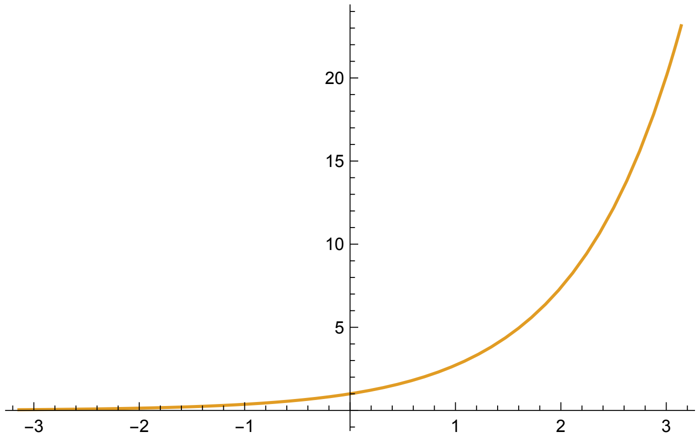


Das ist nicht besonders gut. Wir vergleichen die Reihe bis zu n=20:

In[•]:=
```
FR20[x_] = FourierTrigSeries[Exp[x], x, 20];
Plot[{FR20[x], Exp[x]},
    {x, -π, π}, PlotRange -> All]
```

··· Set: Tag Plus in $\left(\mathrm{Cosh}[\pi]+\ll 59\gg+\frac{e^{20\,i\,x}\,((401+8020\,i)\,\pi\,\mathrm{Cosh}[\pi]+(399-40\,i)\,\mathrm{Sinh}[\pi])}{160801\,\pi}+\frac{e^{-20\,i\,x}\,((401-8020\,i)\,\pi\,\mathrm{Cosh}[\pi]+(399+40\,i)\,\mathrm{Sinh}[\pi])}{160801\,\pi}\right)$[x_] is Protected.

Out[•]=



Wir beobachten am Rand das charakteristische Gibbsche Phänomen, das an den Sprungstellen (die Fourierreihe konvergiert ja gegen die periodische Funktion!) auftritt.

```
In[∘]:= ClearAll["Global`*"];
```

13.2

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion f(x)=x^2
(a) im Bereich x $\in$ (-1, 1), sowie
(b) im Bereich x $\in$ (0, 2π) für dieses Periodizitätsintervall,
und demonstrieren Sie die Konvergenz. Wie gut gilt die Besselsche Ungleichung?

Lösungsweg

(a)

Es handelt sich um eine im Periodizitätsintervall symmetrische Funktion und daher tragen nur die geraden Terme bei.

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b dx\, f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}$$
$$= \int_{-1}^{1} dx\, x^2 \cos(n\pi x),$$
$$a_0 = \frac{2}{3},\quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

(Rechnung mittels partieller Integration.)

Die Reihe lautet also

$$FR[x] = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x)$$

Die Besselsche Ungleichung vergleicht die Norm der Partialreihe mit der Norm der Funktion selbst. Die Norm der Partialreihe (für unsere Konvention der Fourierreihe) ist

$$(FR_N, FR_N) = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

In unserer Aufgabe ist

$$(FR_5, FR_5) = \frac{4}{18} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^4} = 0.3997..$$

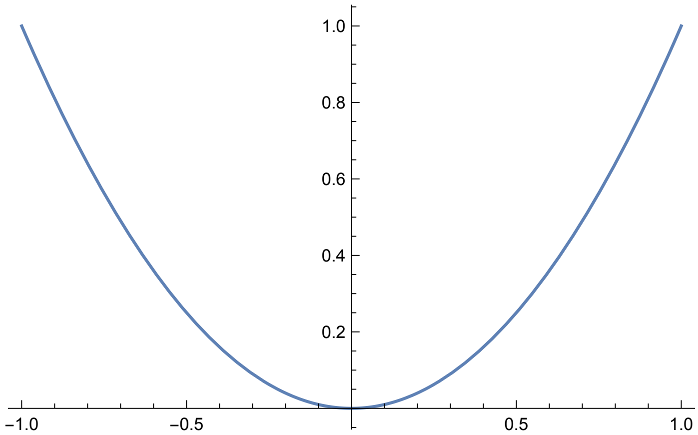
Die Norm der Funktion ist

$$\left(x^2, x^2\right) = \int_{-1}^{1} dx\, x^4 = 0.4$$

Die relative Abweichung des Normquadrats ist also 0.0003/0.4=0.00075.

Wie sieht das graphisch aus? Wir vergleichen die Fourierreihe (bis n=5) mit der Funktion.

In[•]:=
```
FR[x_] = FourierTrigSeries[x^2, {x, -1, 1}, 5];
Plot[{x^2, FR[x]}, {x, -1, 1}]
```

Out[•]=


(b)

In dem angegebeben Intervall ist die Funktion x^2 nicht symmetrisch. Wir müssen also sowohl a_n also auch b_n bestimmen.

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx\, f(x) \cos \frac{2 n \pi x}{b-a}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx\; x^2 \cos(n x),$$

$$a_0 = \frac{8 \pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dx\, f(x) \sin \frac{2 n \pi x}{b-a}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx\; x^2 \sin(n x),$$

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

Die Reihe lautet daher

$$FR[x] = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos(n x) - \frac{\pi}{n} \sin(n x) \right).$$

Das Normquadrat der Partialreihe bis n=5 ist

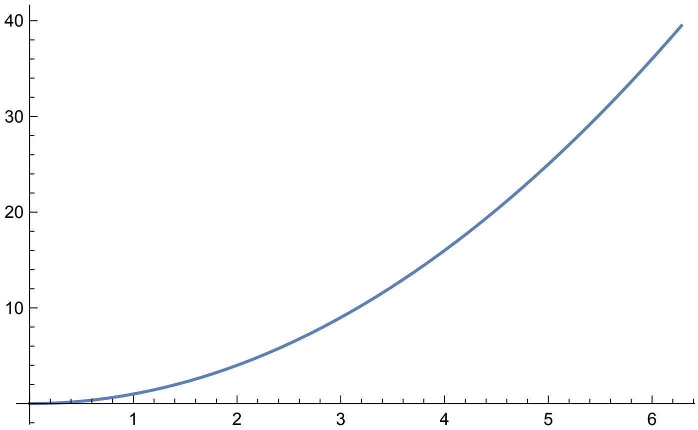
$$(FR_5, FR_5) = \frac{32\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{5} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{n^2} \right) = 594.753$$

und das Normquadrat der Funktion ist

$$\left(x^2, x^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx\; x^4 = \frac{32\pi^4}{5} = 623.418$$

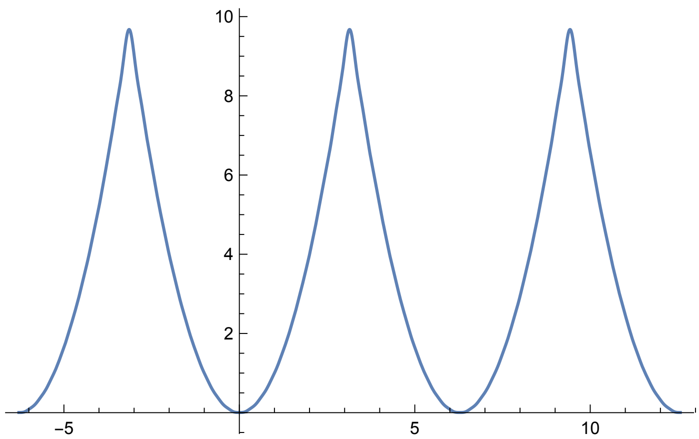
Die Konvergenz ist also eher schlecht, wie man durch Vergleich der Funktion mit der Partialreihe auch erkennt:

In[•]:=
```
FR[x_] = FourierTrigSeries[x^2, {x, 0, 2 π}, 5];
Plot[{x^2, FR[x]}, {x, 0, 2 π}]
```

Out[•]=


Der Grund für die langsame Konvergenz (und für das Gibbsche Phänomen) liegt offenbar in der durch die erzwungene Periodizität vorgegebene Sprungstelle am Rand. Die periodisch fortgesetzte Funktionsreihe (wir verwenden nun die Terme bis n=20) hat die Form

In[•]:=
```
FR[x_] = FourierTrigSeries[x^2, x, 20]; Plot[FR[x], {x, -2 π, 4 π}]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.3

Die Funktion f(x)=x ist im Bereich $x \in (0,2\pi)$ gegeben und sei periodisch mit dieser Periode. Wie lautet die entsprechende Fourierreihe?

Lösungsweg

Die Funktion ist zwar im Periodizitätsintervall nicht symmetrisch oder antisymmetrisch und wird also sowohl gerade als auch ungerade Terme in ihrer Fourierreihe haben, aber wir können die Situation sofort vereinfachen. Die Funktion

$g(x) = x - \pi = f(x) - \pi$

ist im Intervall rein antisymmetrisch und hat also nur ungerade (Sinus-)Terme in ihrer Fourierreihe.

Die Koeffizienten könnten wir durch das Integral

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ (x-\pi)\ \sin n\, x$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ x \sin\,[n\ (x+\pi)]$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\ \ x \sin\,(n\, x)$$
$$= -\frac{(-1)^n}{\pi}\ \frac{2\pi\ (-1)^n}{n} = -\frac{2}{n}$$

Die Fourierreihe von f(x)=x lautet damit

$$FR[f] = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\,(n\, x)\,.$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch durch Transformation aus dem Ergebnis (13.20) erhalten können. Dort war die FR für die Funktion f(y)=y im Periodizitätsintervall yϵ(-π,π) zu

$$FR[f] = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\,(n\, y)\,.$$

berechnet worden. Mit

$$x = y + \pi$$

ergibt sich

$$x\in\ (0,\ 2\pi)$$
$$f\ (x) = f\ (y) + \pi$$
$$FR[f\ (x)] = FR[f\ (y = x - \pi)] + \pi$$
$$= \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin[n\ (x-\pi)]$$
$$= \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\,(n\, x)\,.$$

wobei wir wieder die Beziehung

$$\sin\,(a + n\,\pi) = (-1)^n \sin a$$

verwendeten.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.4

Die Funktion f(x)=|x| ist im Bereich x ϵ (-1, 1) gegeben und ist periodisch mit der Periode 2. Bestimmen Sie die entsprechende Fourierreihe, und skizzieren Sie den Verlauf der Partialsummen f_n(x) für 1, 2 und 3 Terme.

Lösungsweg

Es handelt sich um eine im Periodizitätsintervall symmetrische Funktion und daher tragen nur die geraden Terme bei.

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b dx\ f\ (x)\ \cos\ \frac{2\, n\, \pi\, x}{b-a}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \;\; |x| \;\; \cos(n\pi x)$$

$$= 2\int_{0}^{1} dx \;\; x\cos(n\pi x)$$

$$a_0 = 2\int_{0}^{1} dx \;\; x = 1$$

$$a_{n>0} = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2} \text{ für ungerade n, sonst 0}$$

Die Reihe lautet also

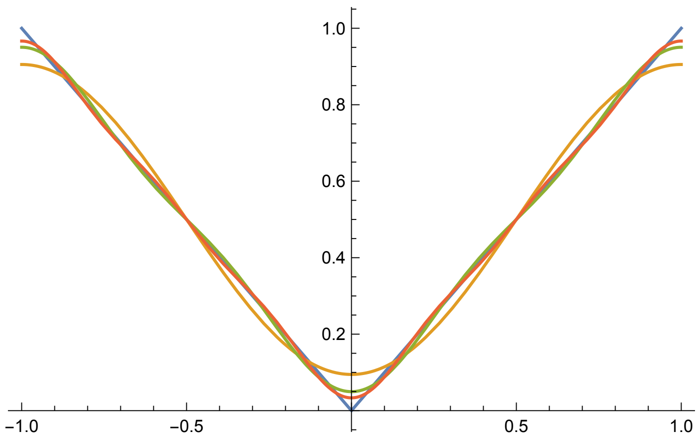
$$FR[x] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos[(2k+1)\pi x]$$

und wir haben dabei durch die Ersetzung n→2k+1 dafür gesorgt, dass nur die ungeraden Glieder beitragen.

Die Partialreihen sind

In[•]:=
```
f1 = 1/2 - 4 Cos[π x]/π^2;
f2 = f1 - 4 Cos[3 π x]/(9 π^2);
f3 = f2 - 4 Cos[5 π x]/(25 π^2);
Plot[{Abs[x], f1, f2, f3}, {x, -1, 1}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.5

Wie lautet die Fourierreihe für die Funktion f(x)= cos(px) (p nicht ganzzahlig) im Bereich x ∈ (-π, π). Skizzieren Sie die durch die ersten Terme erzielte Näherung.

Lösungsweg

Nur Kosinus-Terme tragen bei, da die Funktion im Periodizitätsintervall symmetrisch ist.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \;\; \cos(px)\;\cos(nx)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; (\cos[n x - p x] + \cos[n x + p x])$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin[n x - p x]}{n - p} + \frac{\sin[n x + p x]}{n + p} \right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \sin(p\pi) \left(\frac{-1}{n - p} + \frac{1}{n + p} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2 p \sin(p\pi)}{p^2 - n^2}$$

In[•]:=
```
Integrate[Cos[p x] / Pi, {x, -Pi, Pi}]
```

Out[•]= $\frac{2\,\text{Sin}[p\,\pi]}{p\,\pi}$

Die Reihe lautete daher

$$FR[f] = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \frac{2 p \sin(p\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^2 - n^2} \cos(n x) \; .$$

Beachten Sie: die Koeffizienten sind für die nahe p liegenden Werte von n am größten!

Wir vergleichen die Partialsumme der ersten Terme (bis n=3) mit der Funktion cos(4 x/3):

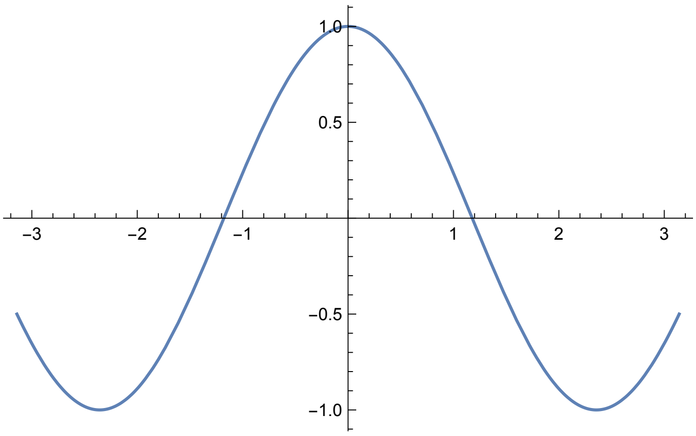
In[•]:=
```
FR2 = FourierTrigSeries[Cos[4 x / 3], {x, -Pi, Pi}, 3]
```

Out[•]= $\text{FourierTrigSeries}\left[\text{Cos}\left[\frac{4x}{3}\right], \{x, -\pi, \pi\}, 3\right]$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{12\sqrt{3}\,\text{Cos}[x]}{7\pi} + \frac{3\sqrt{3}\,\text{Cos}[2x]}{5\pi} + \frac{-12\sqrt{3}\,\text{Cos}[3x]}{65\pi}$$

In[•]:=
```
Plot[{Cos[4 x / 3], FR2}, {x, -Pi, Pi}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.6

Man bestimme die Fourierreihe für die Funktion f(x)= sin[(k+1/2) x] im Bereich x $\in$ ($-\pi$, π) (k ganzzahlig).

Lösungsweg

Antisymmetrische Funktion (im Periodizitätsintervall)→ nur Sinus-Terme der Fourierreihe tragen bei.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] \sin(n\,x)$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\mathrm{Cos}\left[\left(\frac{1}{2}+k-n\right)x\right] - \mathrm{Cos}\left[\left(\frac{1}{2}+k+n\right)x\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\left(\frac{\sin\left[\left(\frac{1}{2}+k-n\right)x\right]}{\frac{1}{2}+k-n} - \frac{\sin\left[\left(\frac{1}{2}+k+n\right)x\right]}{\frac{1}{2}+k+n}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin\left[\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi\right]\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+k-n} - \frac{1}{\frac{1}{2}+k+n}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{n\,(-1)^{n+k}}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^2 - n^2}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.7

Berechnen Sie die Fourierreihe in Exponentialform für die Funktionen

(a) f(x) = x e^x im Bereich x ϵ (-π, π);

(b) f(x) = |1-x| im Bereich x ϵ (-10, 10).

Skizzieren Sie die durch die ersten Terme erzielte Näherung.

Lösungsweg

Die Fourierreihe in Exponentialform lautet

$$\mathrm{FR}[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\,n\,\pi\,i}{b-a}\right), \quad \text{mit}$$

$$c_n = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b dx\, f(x) \exp\left(-\frac{2\,n\,\pi\,x\,i}{b-a}\right).$$

(a)

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; x\; \exp(x - n\,x\,i)$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; x\; \exp[x\,(1-n\,i)]$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\,x\; \exp[x\,(1-n\,i)]$$

$$= \left(\frac{1}{2\,\pi}\,e^{(1-n\,i)\,x}\left(-\frac{1}{(1-n\,i)^2} + \frac{x}{(1-n\,i)}\right)\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{(1-n\,i)^2}+\frac{\pi\,e^{\pi}+\pi\,e^{-\pi}}{(1-n\,i)}\right)$$

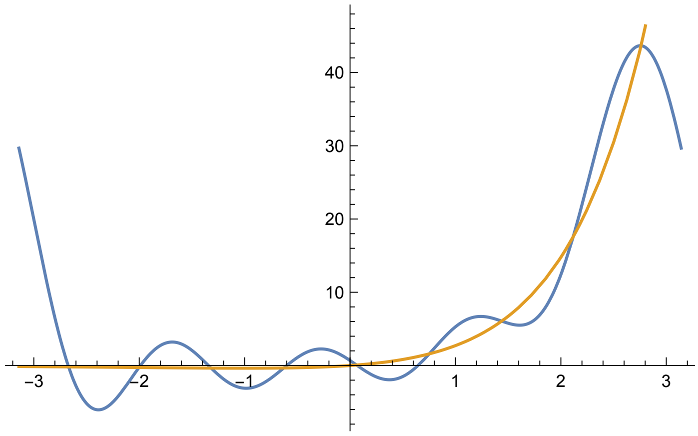
$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\,\frac{1}{1-n\,i}\left[e^{\pi}\left(\pi-\frac{1}{1-n\,i}\right)+e^{-\pi}\left(\pi+\frac{1}{1-n\,i}\right)\right]$$

Die Koeffizienten sind also ziemlich umständlich per Hand zu berechnen. Wir verwenden für die Vergleichsrechnung daher die Mathematica-Funktionen. Wir vergleichen noch die Terme der Reihe bis n=4 mit der Funktion:

In[∘]:=
```
FR4 = FourierSeries[x E^x, x, 4];
```

In[∘]:=
```
Plot[{FR4, x E^x}, {x, -π, π}]
```

Out[∘]=

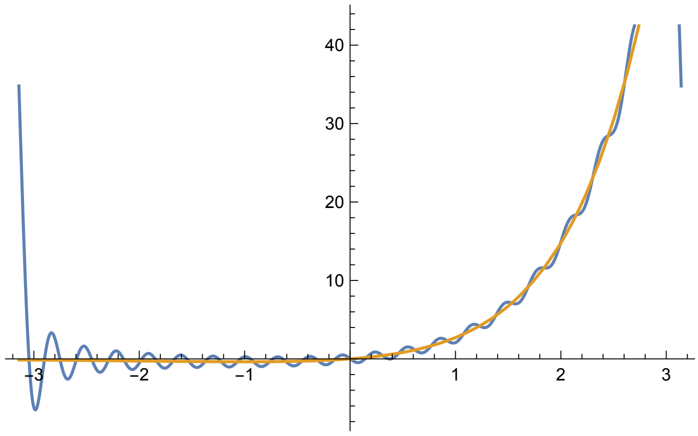


Die Konvergenz ist anscheinend ziemlich miserabel! Für die Reihe bis n=20 ergibt sich

In[∘]:=
```
FR20 = FourierSeries[x E^x, x, 20];
```

In[∘]:=
```
Plot[{FR20, x E^x}, {x, -π, π}]
```

Out[∘]=



Das Gibbsche Phänomen schlägt voll zu!

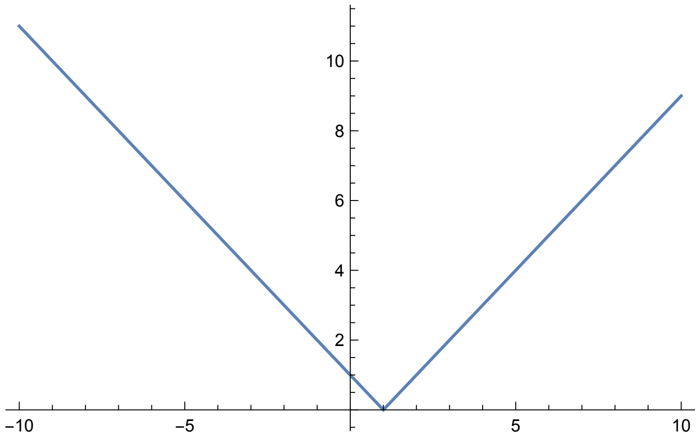
(b)

$$c_n = \frac{1}{20}\int_{-10}^{10} dx\;\left|1-x\right|\;\exp\left(-\frac{n\,\pi\,x\,i}{10}\right)$$

Zuerst ein Blick auf die Funktion selbst:

In[∘]:=
```
Plot[Abs[1 - x], {x, -10, 10}]
```

Out[∘]=



Wir zerlegen daher das Integral

$$c_{n\neq 0} = \frac{1}{20}\int_{-10}^{1} dx\ (1-x)\exp\left(-\frac{n\pi\ x\, i}{10}\right)$$
$$+\ \frac{1}{20}\int_{1}^{10} dx\ (x-1)\exp\left(-\frac{n\pi\ x\, i}{10}\right)$$
$$= -\frac{10\, E^{-\frac{1}{10} I n \pi}}{n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n\,(10 - I n\pi)}{n^2\pi^2}$$
$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n\,(10 - I n\pi) - 10\, E^{-\frac{1}{10} I n\pi}\right],$$
$$c_0 = \frac{1}{20}\int_{-10}^{1} dx\ (1-x) + \frac{1}{20}\int_{1}^{10} dx\ (x-1)$$
$$= \frac{101}{20}$$

Die ersten Terme der Reihe haben die Form

In[∘]:=
```
FR2 = FourierSeries[Abs[1 - y 10 / Pi], y, 2] /. y → x Pi / 10
```

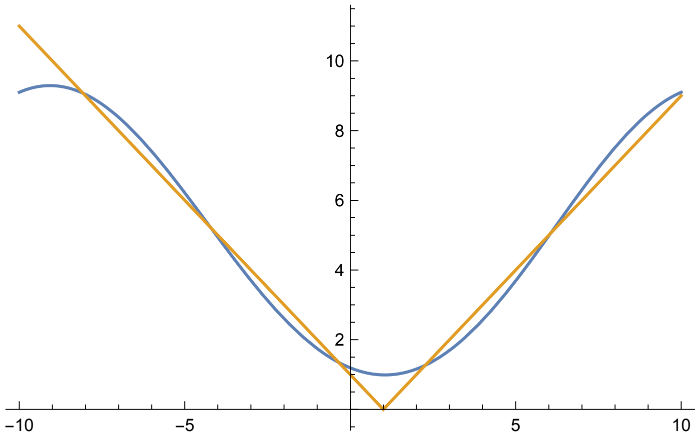
Out[∘]=

$$\frac{101}{20} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{5}}\left(5 + 5\,(-1)^{4/5} - i\pi\right)}{2\pi^2} + \frac{e^{-\frac{1}{5} i\pi x}\left(5 - 5\,(-1)^{1/5} + i\pi\right)}{2\pi^2} +$$
$$\frac{i\, e^{\frac{i\pi x}{10}}\left(5\left((-1+4\,i) + \sqrt{5} + i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}\right) + 2\pi\right)}{2\pi^2} -$$
$$\frac{i\, e^{-\frac{1}{10} i\pi x}\left(4\pi + 5\left((-2-8\,i) + 2\sqrt{5} - i\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} + -3.80\ldots\, i\right)\right)}{4\pi^2}$$

Wir vergleichen die Partialsummen (für -2≤n≤2) mit der Funktion:

In[•]:=
```
Plot[{FR2, Abs[1 - x]}, {x, -10, 10}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.8

Berechnen Sie die Fourier-Sinus-Reihe und die Fourier-Kosinus-Reihe für die Funktion f(x)=1-x, gegeben im Bereich $x \in (0, 1)$.

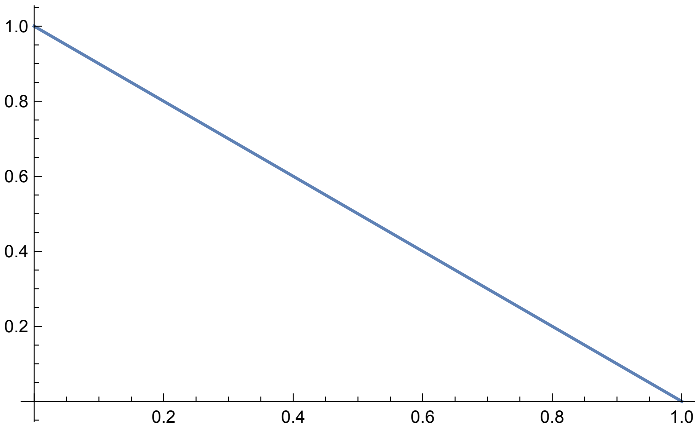
Lösungsweg

Fourierkosinusreihe

Es geht um die Fourierkosinusreihe folgender Funktion, die man sich symmetrisch gespiegelt zur y-Achse denken muss:

In[•]:=
```
Plot[1 - x, {x, 0, 1}]
```

Out[•]=



Entsprechend (13.31) berechnen wir

$$a_n = 2 \int_0^1 dx\ (1 - x)\ \cos\ (n\,\pi\,x)$$

$$a_0 = 2 \int_0^1 dx\ (1 - x)\ = 1$$

$$a_{n>0} = \frac{2}{n^2\,\pi^2}\,[1 - (-1)^n]$$

$$= \frac{4}{n^2\,\pi^2}\ \text{für ungerade } n,\ \text{sonst } 0$$

Die FKR hat daher die Form

$$\mathrm{FKR}[f] = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos[(2k+1)\pi x] .$$

Dies ist die gesuchte Reihe.

Sie müsste übereinstimmen mit der Fourierreihe der Funktion

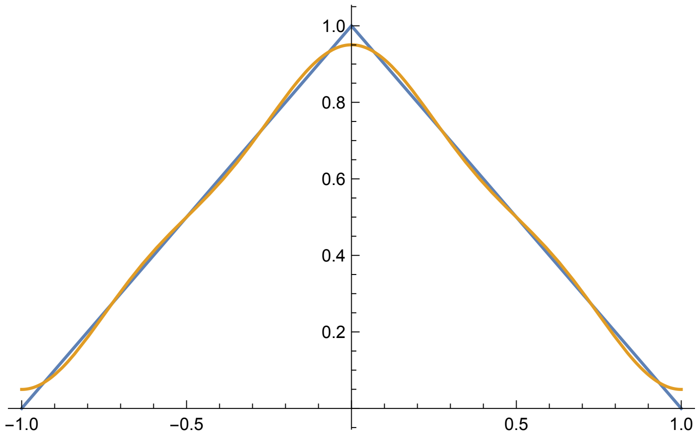
In[∘]:=
```
f[x_] := If[x < 0, 1 + x, 1 - x];
```

In[∘]:=
```
F3 = FourierTrigSeries[f[y / Pi], y, 3] /. y → Pi x
```

Out[∘]=
$$\frac{1}{2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[\pi x]}{\pi^2} + \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\pi x]}{9\pi^2}$$

Wir vergleichen die Reihe bis zum Term cos(5 πx) mit der symmetrisierten Funktion:

In[∘]:=
```
Plot[{f[x], F3}, {x, -1, 1}]
```

Out[∘]=


Fouriersinusreihe

Entsprechend (13.31) berechnen wir

$$b_n = 2 \int_0^1 dx\, (1 - x) \sin(n\pi x)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}$$

Die FSR hat daher die Form

$$\mathrm{FSR}[f] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin[n\pi x] .$$

Dies ist die gesuchte Reihe.

Sie müsste übereinstimmen mit der Fourierreihe der Funktion

In[∘]:=
```
f[x_] := If[x < 0, -1 - x, 1 - x];
```

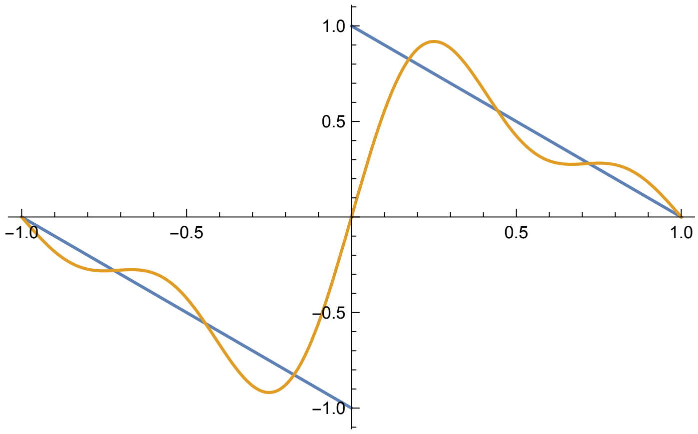
In[∘]:=
```
F3 = FourierTrigSeries[f[y / Pi], y, 3] /. y → Pi x
```

Out[∘]=
$$\frac{2\,\mathrm{Sin}[\pi x]}{\pi} + \frac{\mathrm{Sin}[2\pi x]}{\pi} + \frac{2\,\mathrm{Sin}[3\pi x]}{3\pi}$$

Wir vergleichen die Reihe bis zum Term sin(5 πx) mit der symmetrisierten Funktion:

In[•]:=
```
Plot[{f[x], F3}, {x, -1, 1}]
```

Out[•]=



Diese Reihe konvergiert deutlich schlechter, was man auch an dem langsamen Abfall der Koeffizienten (proportional 1/n) erkennen kann. Die Konvergenz ist vergleichbar mit der der alternieren harmonischen Reihe!

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

13.10

Der berühmte Experimentator McKilroy ("`McKilroy was here!"') hat nach dem Abschalten der wichtigsten Komponenten seines Experiments dennoch auf der Messapparatur Signale abgelesen:

t[ms]	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
x(t)	1.415	1.535	0.	-1.535	-1.415	-2.271	-1.006	0.	1.006	2.271

Er hat den Verdacht, dass dies irgendwie mit Schwankungen des Stromnetzes (Periode 20 msec) zusammenhängt. Beiträge von welchen Frequenzen könnten das Ergebnis erklären? Stimmt sein Verdacht, dass es sich nur um drei Terme handelt?

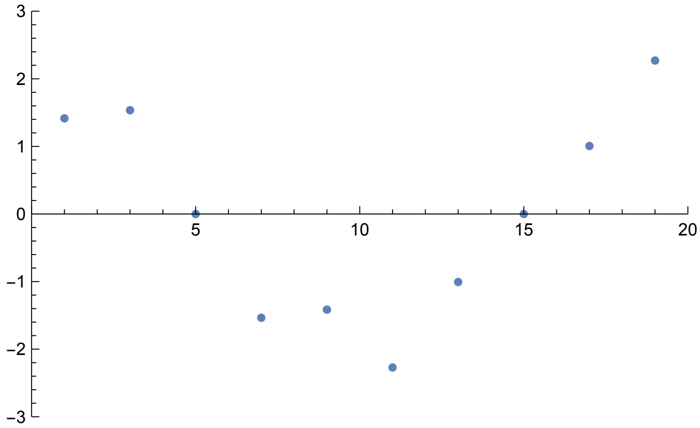
Lösungsweg

Zuerst sehen wir uns die Daten an

In[•]:=
```
Daten = {{1., 1.415}, {3., 1.535}, {5., 0.}, {7., -1.535}, {9., -1.415},
   {11., -2.271}, {13., -1.006}, {15.`, 0.}, {17., 1.006}, {19., 2.271}};
```

In[•]:=
```
PlotDaten = ListPlot[Daten,
   Prolog -> AbsolutePointSize[5], PlotRange -> {{0, 20}, {-3, 3}}]
```

Out[•]=



Wir wollen eine Fourieranalyse dieser Punkte durchführen, unter der Annahme, dass die Periode die Länge 20 hat, also die 10 Punkte von 1 bis 19 enthält. Der Punkt bei 21 hat wieder den Wert des Punktes bei 1.

Entsprechend (13.28) und C.13.1.1 können wir höchsten N Koeffizienten der Fourierreihe berechnen (wenn es nur N äquidistante Stützstellen gibt). Die Fourierreihe hat also höchstens N Terme (Periode in x: 2L). Um eine symmetrische Form zu erhalten, schreiben wir (für gerade N)

$$\begin{aligned} FR(x) &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} c_n \exp\left[i\, n\, x\, \frac{\pi}{L}\right] \\ &\quad + \frac{c_{N/2}}{2}\left(\exp\left[i x\, \frac{N\pi}{2L}\right] + \exp\left[-i x\, \frac{N\pi}{2L}\right]\right) \\ &= \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} c_n \exp\left[i\, n\, x\, \frac{\pi}{L}\right] + c_{N/2} \cos\left[x\, \frac{N\pi}{2L}\right] \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \exp\left[-i\, n\, x_k\, \frac{\pi}{L}\right].$$

Wir haben dabei die beiden Terme zum Index ±N/2 nur halb gezählt und die Identität der Koeffizienten berücksichtigt.

In unserem Beispiel ist

$N = 10,$

$2L = 20 \to L = 10,$

$x = \{1, 3, \ldots, 19\} \to x_k = 2k+1,$

$$c_n = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{9} y_k \exp\left[-i\, n\, (2k+1)\, \frac{\pi}{10}\right]$$

Wir definieren

In[•]:=
```
c[n_] := Sum[Daten[[k + 1, 2]] Exp[- I n (2 k + 1) π / 10] / 10, {k, 0, 9}];
```

In[•]:=
```
Ctab = Chop[Table[c[n], {n, -5, 5}]]
```

Out[•]=
```
{0, 0. - 0.225009 i, -0.0500116, 0. - 7.05577 × 10^-6 i, 0.999831,
 0, 0.999831, 0. + 7.05577 × 10^-6 i, -0.0500116, 0. + 0.225009 i, 0}
```

Nur die Koeffizienten für n=±1,±3,±4 sind also von 0 deutlich verschieden. Es handelt sich dabei immer um Paare, die sich in der Reihe zu Kosinus (n=1,3) oder Sinus (n=4) -Termen ergänzen:

In[•]:=
```
ysum = Sum[Chop[c[n]] Exp[I n x π/10], {n, -4, 4}] + Chop[c[5]] Cos[5 x π/10]
```

Out[•]=

$$0.999831\, e^{-\frac{1}{10} i \pi x} + 0.999831\, e^{\frac{i \pi x}{10}} - (0. + 7.05577 \times 10^{-6}\, i)\, e^{-\frac{1}{5} i \pi x} + (0. + 7.05577 \times 10^{-6}\, i)\, e^{\frac{i \pi x}{5}} - 0.0500116\, e^{-\frac{3}{10} i \pi x} - 0.0500116\, e^{\frac{3 i \pi x}{10}} - (0. + 0.225009\, i)\, e^{-\frac{2}{5} i \pi x} + (0. + 0.225009\, i)\, e^{\frac{2 i \pi x}{5}}$$

(Der Term zu c[5] hat gar nicht beigetragen.)
Wenn wir die ganz kleinen Terme vernachlässigen, erhalten wir

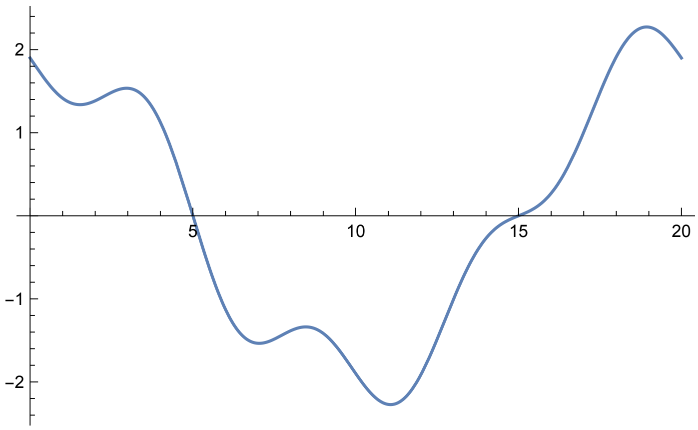
In[•]:=
```
y[x_] = Chop[ComplexExpand[ysum]]
```

Out[•]=

$$1.99966\, \mathrm{Cos}\left[\frac{\pi x}{10}\right] - 0.100023\, \mathrm{Cos}\left[\frac{3 \pi x}{10}\right] - 0.0000141115\, \mathrm{Sin}\left[\frac{\pi x}{5}\right] - 0.450017\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2 \pi x}{5}\right]$$

In[•]:=
```
PlotFR = Plot[y[x], {x, 0, 20}]
```

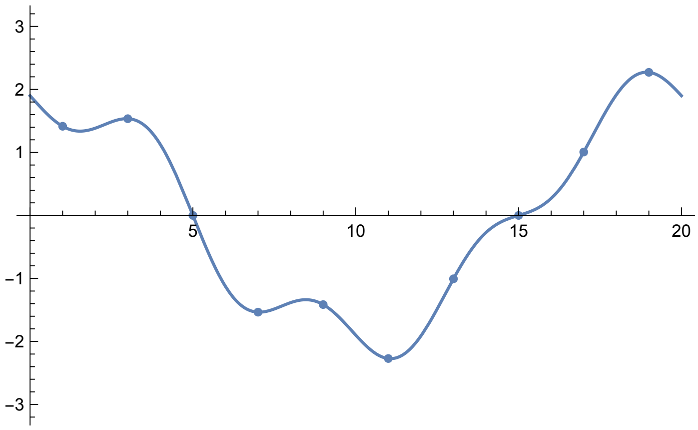
Out[•]=



Diese Fourierreihe geht durch die 10 Datenpunkte und interpoliert diese durch eine periodische Funktion.

In[•]:=
```
Show[PlotFR, PlotDaten,
 Prolog -> AbsolutePointSize[5], PlotRange -> {{0, 20}, {-3, 3}}]
```

Out[•]=

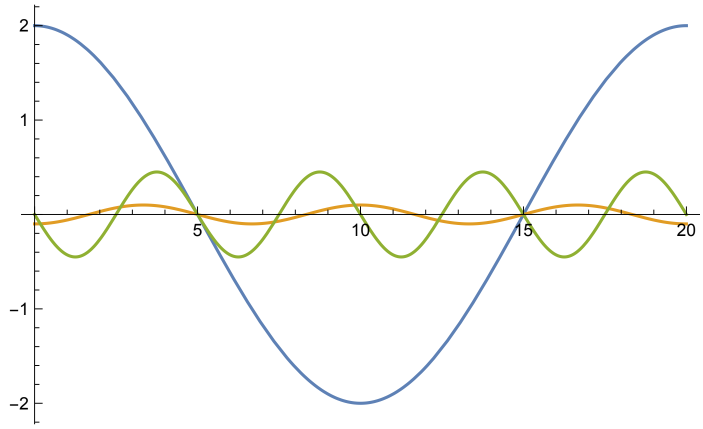


Die wichtigsten Beiträge haben also die Frequenzen 50 Hz (Amplitude 2), 150 Hz (Amplitude -0.1) und 200 Hz (Amplitude -0.45)! (Die gesamte Periode 20 ms entspräche einer Frequenz von 50 Hz). Einzeln gezeichnet sind das folgende Beiträge:

In[∘]:=
```
Plot[{2 Cos[π x/10], -0.1 Cos[3 π x/10],
   -0.45 Sin[2 π x/5]}, {x, 0, 20}]
```

$$\text{Plot}\left[\left\{2\,\text{Cos}\left[\frac{\pi\,x}{10}\right],\ -0.1\,\text{Cos}\left[\frac{3\,\pi\,x}{10}\right],\ -0.45\,\text{Sin}\left[\frac{2\,\pi\,x}{5}\right]\right\},\ \{x,0,20\}\right]$$

Out[∘]=



McKilroy hat recht mit seiner Vermutung (und er hat das Experiment vermutlich nicht in den USA durchgeführt): anscheinend stimmt etwas mit der Erdung seiner Geräte nicht und er hat Störungen durch das Stromnetz (50 Hz) gemessen!

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```