# Mathematische Methoden in der Physik

## Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

# Kapitel 14. Integraltransformationen

### 14.1

Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$m\,\ddot{y} + k\,y = 0$$

mit den Anfangsbedingungen y(0)=a, $\dot{y}(0)$=0 mit Hilfe der Laplace-Transformation.

### Lösungsweg

Die Laplace-Transformierten von y(t) sei Y(p), dann ist (vgl. M.14.1)

$$L(\ddot{y}) = p^2\,Y - p\,y(0) - \dot{y}(0) = p^2\,Y - a\,p$$

Die DG transformiert daher zu

$$m\,p^2\,Y(p) - m\,a\,p + k\,Y(p) = 0$$

$$\to Y(p) = a\,\frac{p}{p^2 + \frac{k}{m}} = \quad \text{mit } p > 0$$

$$\to y(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

Das ist einfach eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wir haben dabei die Beziehung aus M.14.1

$$L(\cos(c\,t)) = \frac{p}{p^2 + c^2} \quad \text{für } \mathrm{Re}(p) > |\mathrm{Im}\,c|$$

für c=$\sqrt{\frac{k}{m}}$ verwendet.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

## 14.2

Lösen Sie  mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differenzialgleichungen:

(a) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$,
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$,

(b) $y'' - y = e^{x}$,
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$,

(c) $y'' + 2y' + 5y = 20\, e^{3x}$,
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 20$,

(d) $y'' + 2y' + 10y = 5$,
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ ,

(e) $y'' + 5y' + 4y = -4\, e^{-2x}$,
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$.

### Lösungsweg

(a)

$$L[y'' + 3y' + 2y] = L[e^{-x}]$$

$$p^2 Y + 3pY + 2Y = \frac{1}{p+1}$$

$$Y = \frac{1}{(p+1)(p^2+3p+2)}$$

$$= \frac{1}{(p+1)(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{1}{(1+p)^2} - \frac{1}{1+p} + \frac{1}{2+p}$$

$$y = L^{-1}[Y] = x e^{-x} - e^{-x} + e^{-2x}$$

(d)

$$L[y'' + 2y' + 10y] = L[5]$$

$$p^2 Y - p + 2pY - 2 + 10Y = \frac{5}{p}$$

$$Y = \frac{1}{(p^2+2p+10)}\left(\frac{5}{p} + p + 2\right)$$

$$= \frac{1}{(p^2+2p+10)}\left(\frac{p^2+2p+5}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{5}{(p^2+2p+10)p}$$

$$= \frac{1}{2p} + \frac{2+p}{2(10+2p+p^2)}$$

$$= \frac{1}{2\,p} + \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{(p+1)^2+9} + \frac{1}{6}\,\frac{3}{(p+1)^2+9}$$

$$y = L^{-1}[Y] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,e^{-x}\cos(3\,x) + \frac{1}{6}\,e^{-x}\sin(3\,x)$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

## 14.3

Was ist die Fouriertransformierte von

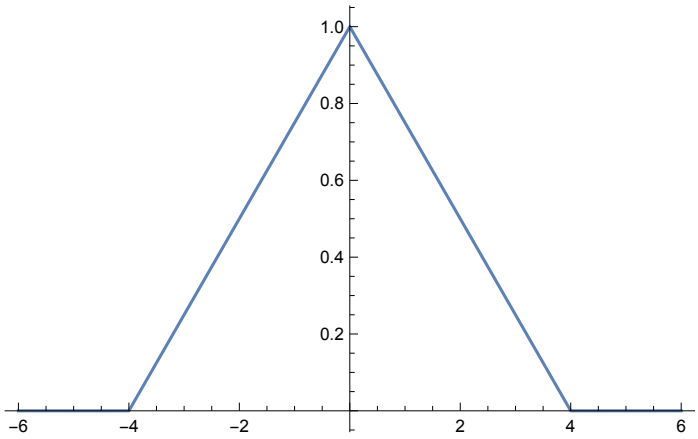
$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{|x|}{a} & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

## Lösungsweg

Es geht um folgende Funktion (hier für a=4 gezeichnet):

In[•]:=
```
f[x_] = If[Abs[x] < a, 1 - Abs[x] / a, 0];
Plot[f[x] /. {a -> 4}, {x, -6, 6}]
```

Out[•]=




Die Fouriertransformation lautet

$$FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-i\,x\,p}$$

und muss in diesem Beispiel aus zwei Teilen berechnet werden:

$$FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\left[\int_{-a}^{0} dx\, \left(1+\frac{x}{a}\right) e^{-i\,x\,p} + \int_{0}^{a} dx\, \left(1-\frac{x}{a}\right) e^{-i\,x\,p}\right]$$

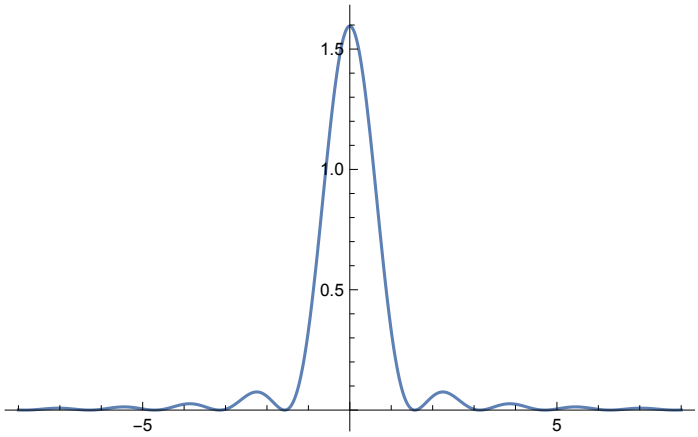
$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\left[\int_{-a}^{a} dx\, e^{-i\,x\,p} + \frac{1}{a}\int_{-a}^{0} dx\, x\, e^{-i\,x\,p} - \frac{1}{a}\int_{0}^{a} dx\, x\, e^{-i\,x\,p}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(1-\cos(a\,p))}{\sqrt{\pi}\,a\,p^2.}$$

Diese Fouriertransformierte hat das Aussehen

In[]:=
```
Plot[Sqrt[2] (1 - Cos[a p]) / (Sqrt[π] a p^2) /. {a -> 4}, {p, -8, 8}, PlotRange -> All]
```

Out[]=




Obwohl wir sie hier nur für das Intervall (-8,8)gezeichnet haben, hat sie auch außerhalb nichtverschwindende Werte.

In[]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

In[]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

## 14.4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4\,y'(x) + 3\,y(x) = \sin x,\quad y(0) = y'(0) = 0$$

mit Hilfe eines Konvolutionsintegrals.

### Lösungsweg

Wir berechnen die Laplace-Transformierte der DG:

$$\mathcal{L}[y''(x) + 4\,y'(x) + 3\,y(x)] = \mathcal{L}[\sin x]$$

$$p^2\,Y + 4\,p\,Y + 3\,Y = \mathcal{L}[\sin x]$$

$$Y = \frac{1}{(p^2 + 4\,p + 3)}\,\mathcal{L}[\sin x]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}\right)\mathcal{L}[\sin x]$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left[e^{-x} - e^{-3x}\right] \times \mathcal{L}[\sin x]$$

Da es sich dabei um ein Produkt von Laplace-Transformierten handelt, kann dieses als Laplace-Transformierte eines Konvolutionsintegrals geschrieben werden:

$$Y = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left[\left(e^{-x} - e^{-3x}\right) * \sin x\right]$$

$$\to y(x) = \frac{1}{2}\int_0^x dt\,\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)\sin(x - t)$$

$$= -\frac{1}{20}\,e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{4} - \frac{\cos(x)}{5} + \frac{\sin(x)}{10}$$

Allerdings wäre diese Rechnung ohne Konvolution vermutlich (wenn man gut mit Partialbruchzer-

legung, siehe Anhang B, umgehen kann) einfacher gewesen:

$$Y = \frac{1}{(p^2 + 4p + 3)} L[\sin x]$$

$$= \frac{1}{(p+1)(p+3)(p^2+1)}$$

mittels Partialbruchzerlegung →

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{20}\frac{1}{p+3} + \frac{1}{10}\frac{1-2p}{p^2+1}$$

$$y(x) = L(Y) = \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{20}e^{-3x} + \frac{1}{10}(\sin(x) - 2\cos(x))$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

## 14.5

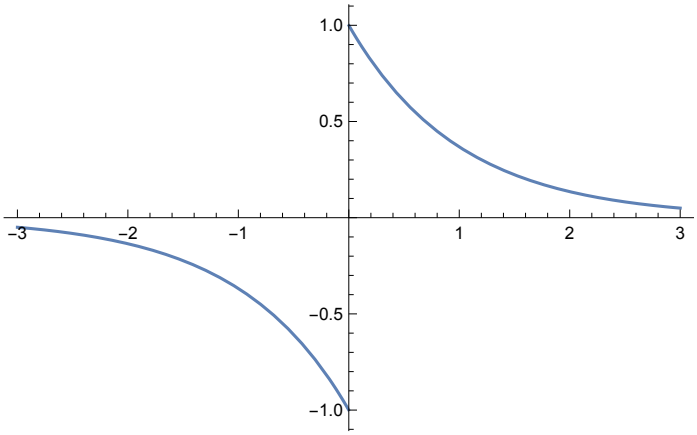
Bestimmen Sie (a) die Fourier-Sinus-Transformierte und (b) die Fourier-Kosinus-Transformierte von $e^{-at}$.

### Lösungsweg

Die **ungerade Erweiterung** der Funktion hat (für a=1) die Form

In[•]:=
```
Plot[If[t < 0, -Exp[t], Exp[-t]], {t, -3, 3}]
```

Out[•]=




**Fourier-Sinus-Transformation**

$$FT_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx\, f_-(x) \sin(x p)$$

$$\to FT_s(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx\, e^{-ax} \sin(x p)$$

$$= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \left(e^{(ip-a)x} - e^{(-ip-a)x}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{e^{(ip-a)x}}{ip-a} + \frac{e^{(-ip-a)x}}{ip+a}\right)_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2\,i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{i\,p-a}+\frac{1}{i\,p+a}\right)$$

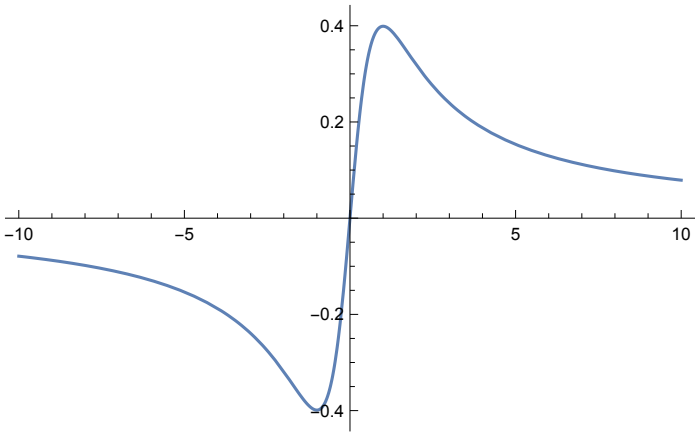
(für Re(a) > 0)

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{p}{a^2+p^2}$$

Diese Funktion hat (für a=1) das Aussehen:

In[•]:=
```
Plot[Sqrt[2/Pi] p/(1 + p^2), {p, -10, 10}]
```

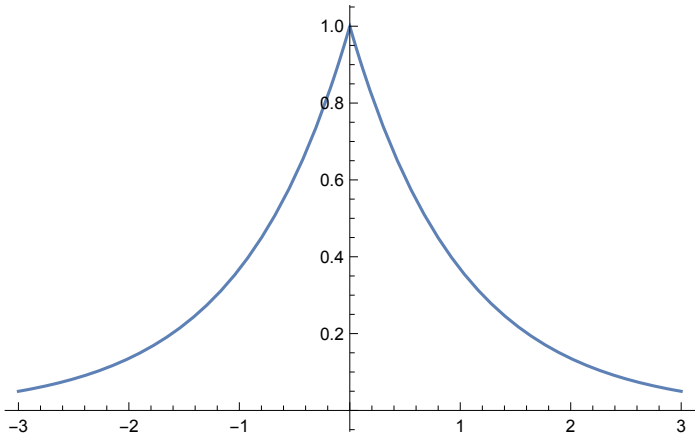
Out[•]=




Die **gerade Erweiterung** der Funktion hat (für a=1) die Form

In[•]:=
```
Plot[Exp[-Abs[t]], {t, -3, 3}]
```

Out[•]=




**Fourier-Kosinus-Transformation**

$$FT_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx\, f_+(x)\cos(x\,p)$$

$$\to FT_c\left(e^{-a\,x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx\, e^{-a\,x}\cos(x\,p)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx\left(e^{(i\,p-a)\,x}+e^{(-i\,p-a)\,x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{e^{(i\,p-a)\,x}}{i\,p-a} - \frac{e^{(-i\,p-a)\,x}}{i\,p+a}\right)_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{i\,p-a} - \frac{1}{i\,p+a}\right)$$

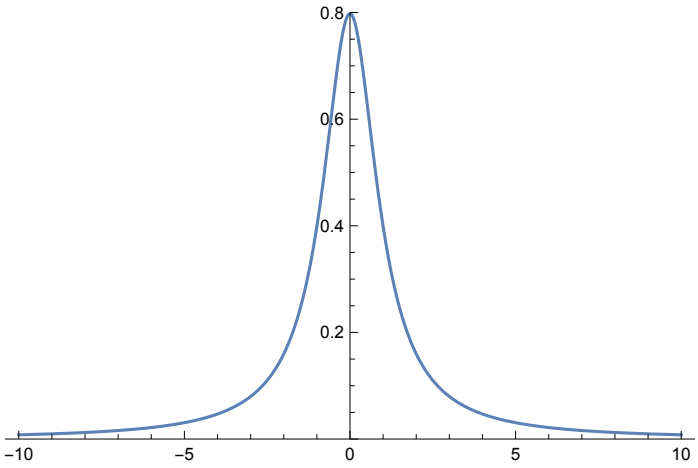
(für Re(a) > 0)

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+p^2}$$

Diese Funktion hat (für a=1) das Aussehen:

In[•]:=
```
Plot[Sqrt[2/π] 1/(1 + p^2), {p, -10, 10}, PlotRange → {All, {0, 0.8}}]
```

Out[•]=




In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```