Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 15. Funktionale und Variationsrechnung

15.1

Berechnen Sie die geodätische Linie für einen Weg auf der Fläche

$z(x,y)=\sqrt{8\,(x^2+y^2)}$

von A nach B; verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Wie lautet die Lösung für den Fall A=(1,0,$\sqrt{8}$) und B=(2,2,8)?

Lösungsweg

Die Darstellung der Fläche in Zylinderkoordinaten lautet

$x = \rho \cos \varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$z = \rho \sqrt{8}$

Der Weg zwischen zwei Punkten ergibt sich durch Integration über das Wegdifferenzial

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(h_\rho\, d\rho)^2 + (h_\varphi\, d\varphi)^2 + (h_z\, dz)^2} \\ &= \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2} \\ &= \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + 8\,(d\rho)^2} \\ &= \sqrt{9\,(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Werte der h_i dem Kapitel 8 über krummlinige Koordinaten entnommen. Wir müssen uns entscheiden, welche Variable die unabhängige sein soll und wählen ρ.

$$S[\rho] = \int \sqrt{9 + \rho^2 \varphi'^2}\, d\rho$$

Mit dieser Wahl ist die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\rho^2 \varphi'}{\sqrt{9 + \rho^2 \varphi'^2}} = 0$$

Wir können sofort integrieren und erhalten

$$\frac{\rho^2 \varphi'}{\sqrt{9 + \rho^2 \varphi'^2}} = b$$

$$\rho^4 \varphi'^2 = 9\, b^2 + \rho^2\, b^2\, \varphi'^2$$

$$\varphi'^2 = \frac{9\, b^2}{\rho^2\, (\rho^2 - b^2)} \quad \text{mit } b < \rho$$

$$\varphi' = \frac{3\, b}{\rho \sqrt{\rho^2 - b^2}}$$

$$\varphi + a = \int \frac{3\, b}{\rho \sqrt{\rho^2 - b^2}}\, d\rho$$

Mit den Substitutionen ρ=b/u und u=cos w lässt sich dieses Integral "knacken" und ergibt

$$\varphi + a = 3 \arccos \frac{b}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{b}{\cos\left(\frac{\varphi + a}{3}\right)}$$

Für $A = \left(1, 0, \sqrt{8}\right)$ ist $\rho = 1$, $\varphi = 0$, und daher

$$1 = \frac{b}{\cos\left(\frac{a}{3}\right)} \rightarrow b = \cos\left(\frac{a}{3}\right)$$

Für $B = (2, 2, 8)$ ist $\rho = \sqrt{8}$, $\varphi = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und daher

$$\sqrt{8} = \frac{\cos\left(\frac{a}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + a}{3}\right)}$$

Das allerdings ist eine transzendente Gleichung. Wir lösen sie numerisch:

```
In[•]:= a = a /. FindRoot[Cos[a / 3] == √8 Cos[(Pi / 4 + a) / 3], {a, 3}]
Out[•]= 3.51275
```

Damit kennen wir auch:

```
In[•]:= b = Cos[a / 3]
Out[•]= 0.389306
```

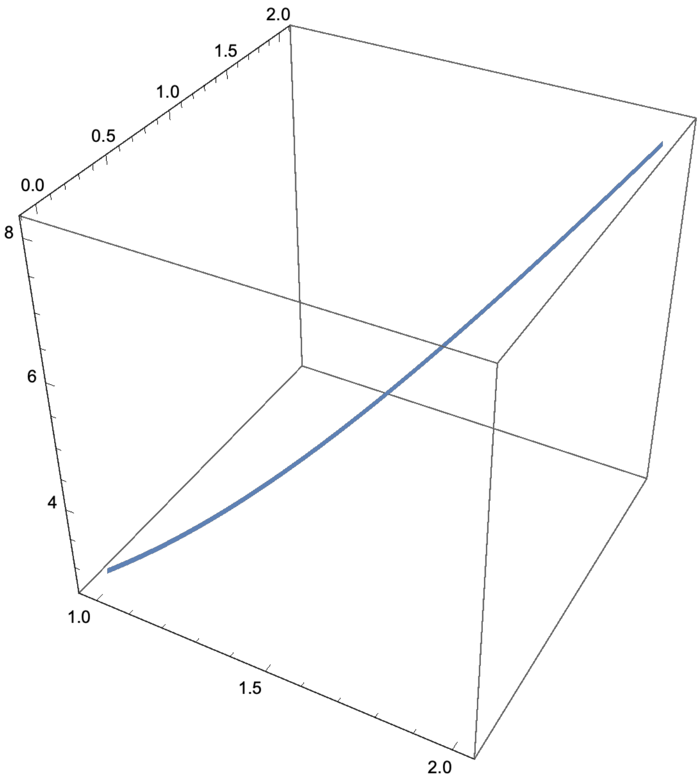
Die Bahnkurve lautet damit

In[•]:=
```
ρ[φ_] = b / Cos[(φ + a) / 3]
```

Out[•]=
$$0.389306\,\mathrm{Sec}\left[\frac{1}{3}\left(3.51275+\varphi\right)\right]$$

Die Kurve verläuft folgendermaßen:

In[•]:=
```
ParametricPlot3D[{ρ[φ] Cos[φ], ρ[φ] Sin[φ], √8 ρ[φ]},
  {φ, 0, π/4}, BoxRatios → {1, 1, 1}]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

15.2

Berechnen Sie die geodätische Linie auf der Fläche

(a) z(x,y)=cosh(y)

(b) z(x,y)=y^2

von A nach B. Wie lautet die Lösung für den Fall A=(1,-1,1)und B=(-1,1,1)?

Lösungsweg

Die geodätische Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche der Form

$z(x, y) = f(y)$

kann für manche Funktionen f(y) geschlossen berechnet werden.

Je nach Anfangsbedingung muss man allerdings die Fälle x= const oder y=const als mögliche Lösungen getrennt bearbeiten, da man bei der Berechnung von ds je nach Wahl der unabhängigen

Variable durch dx oder dy dividiert.

Es ist (bei Wahl von x als unabh. Variable und separater Diskussion von dx=0, x=const)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 \left(1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)\right)$$

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)}$$

$$S[y] = \int \sqrt{1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)}\, dx = \int L\,(y, y')\, dx$$

Da der Integrand nicht von x explizit abhängt, kann man die Beltrami-Gleichung verwenden:

$$L - y'\, \partial_{y'} L = c$$

$$\sqrt{1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)} - \frac{y'^2 \left(1 + f_y^2\right)}{\sqrt{1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)}} = c$$

Der Ausdruck unter der Wurzel ist streng positiv, daher können wir geeignet erweitern und erhalten

$$1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right) - y'^2 \left(1 + f_y^2\right) = c \sqrt{1 + y'^2 \left(1 + f_y^2\right)}$$

$$y'^2 \left(1 + f_y^2\right) = \frac{1}{c^2} - 1$$

Wir benennen die Konstante rechts a und finden die Lösung als Integral der Form

$$\int \sqrt{1 + f_y^2}\, dy = \int a\, dx = a\,x + b$$

Wir haben hier nur die positive Lösung angeschrieben, da das negative Vorzeichen durch Redefinition in die Konstanten verschoben werden kann; diese werden dann ja durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Wir sehen,dass Aufgaben, für die dieses Integral geschlossen lösbar ist, für nicht-konstante x eine geschlossene Lösung erlauben.

(a)

Wir beachten die einleitende Darstellung und berechnen daher direkt

$$\int \sqrt{1 + f_y^2}\, dy = \int a\, dx = a\,x + b$$

für unsere Fläche z(x,y)=cosh(y)=f(y). Es ist daher

$$\int \sqrt{1 + \mathrm{Sinh}[y]^2}\, dy$$

zu berechnen. Da $\sqrt{1 + \mathrm{Sinh}[y]^2} = \mathrm{Cos}[y]$ ergibt sich

$$\int \mathrm{Cos}[y]\, dy = \mathrm{Sinh}[y]$$

Die Lösung ist daher

$$\mathrm{Sinh}[y] = \alpha x + \beta$$

Für die Randbedingungen A(1,-1,1) nach B(-1,1,1) ergibt sich

$$A: \mathrm{Sinh}[-1] = \alpha + \beta$$

$$B: \mathrm{Sinh}[1] = -\alpha + \beta$$

und daher

$$\beta = 0$$

$\alpha = -\text{Sinh}[1] = -1.1752$

und daher

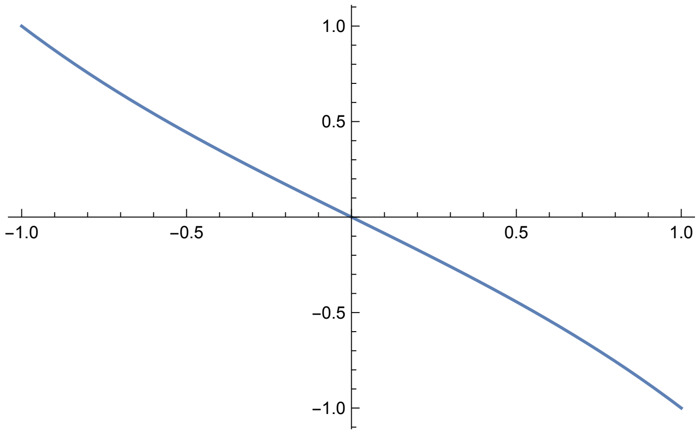
$\text{Sinh}[y] = -1.1752\, x$

oder

$x = -0.850918\, \text{Sinh}[y]$

Von oben betrachtet verläuft die Bahnkurve in der x-y Projektion daher:

In[•]:=
```
Plot[-0.8509181282393216` Sinh[y], {y, -1, 1}]
```

Out[•]=


(b)

Der Weg zwischen zwei Punkten ergibt sich durch Integration über das Wegdifferenzial

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ mit $dz = 2\, y\, dy$

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + 4\, y^2\, (dy)^2}$

$= dx\, \sqrt{1 + \left(1 + 4\, y^2\right)\, y'^2}$

Es ergibt sich das Wegfunktional

$$S[y] = \int \sqrt{1 + \left(1 + 4\, y^2\right)\, y'^2}\, dx$$

Da das Argument des Integrals nicht von x explizit abhängt, können wir die Beltrami-Gleichung verwenden:

$$\sqrt{1 + \left(1 + 4\, y^2\right)\, y'^2} - y' \frac{d}{dy'} \sqrt{1 + \left(1 + 4\, y^2\right)\, y'^2} = c$$

$$\sqrt{1 + \left(1 + 4 y^2\right) y'^2} - y' \frac{\left(1 + 4 y^2\right) y'}{\sqrt{1 + \left(1 + 4 y^2\right) (y')^2}} = c$$

und daraus

$1 = c \sqrt{1 + \left(1 + 4\, y^2\right)\, (y')^2}$

$\left(1 + 4\, y^2\right)\, (y')^2 = \frac{1}{c^2} - 1 = a^2$ (wir führen eine neue Konstante ein)

$$y' = \frac{a}{\sqrt{1+4\,y^2}}$$

$$\sqrt{1+4\,y^2}\;dy = a\,dx$$

Für die Integration transformieren wir   2 y = Sinh(u) und erhalten

$$\sqrt{1+4\,y^2} = \mathrm{Cosh}[u],\;\; dy = (1/2)\,\mathrm{Cosh}[u]\,du$$

$$\int\sqrt{1+4\,y^2}\,dy = a\int dx$$

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{1+\mathrm{Sinh}[u]^2}\;\mathrm{Cosh}[u]\,du = \frac{1}{2}\int\mathrm{Cosh}[u]^2\,du = \frac{1}{4}\int(1+\mathrm{Cosh}[2\,u])\,du =$$
$$\frac{1}{4}\left(u+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sinh}[2\,u]\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{ArcSinh}[2\,y]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Sinh}[2\,\mathrm{ArcSinh}[2\,y]]\right)$$

$$\frac{1}{8}\,(2\,u+\mathrm{Sinh}[2\,u]) = a\,x + b$$

mit der Lösung

$$\frac{1}{8}\,(2\,\mathrm{ArcSinh}[2\,y]+\mathrm{Sinh}[2\,\mathrm{ArcSinh}[2\,y]]) = a\,x + b$$

Mit x=1, y=-1 wird dies zu

In[∘]:= $$-\frac{1}{8}\,(2\,\mathrm{ArcSinh}[2]+\mathrm{Sinh}[2\,\mathrm{ArcSinh}[2]]) = a + b$$

und mit x=-1,y=1

In[∘]:= $$\frac{1}{8}\,(2\,\mathrm{ArcSinh}[2]+\mathrm{Sinh}[2\,\mathrm{ArcSinh}[2]]) = -a + b$$

und daher die Summe 2b=0, also

In[∘]:=
```
b = 0;
a = -N[1/8 (2 ArcSinh[2] + Sinh[2 ArcSinh[2]])]
```

Out[∘]= -1.47894

Die Bahnkurve wird daher am einfachsten als x(y) geschrieben:

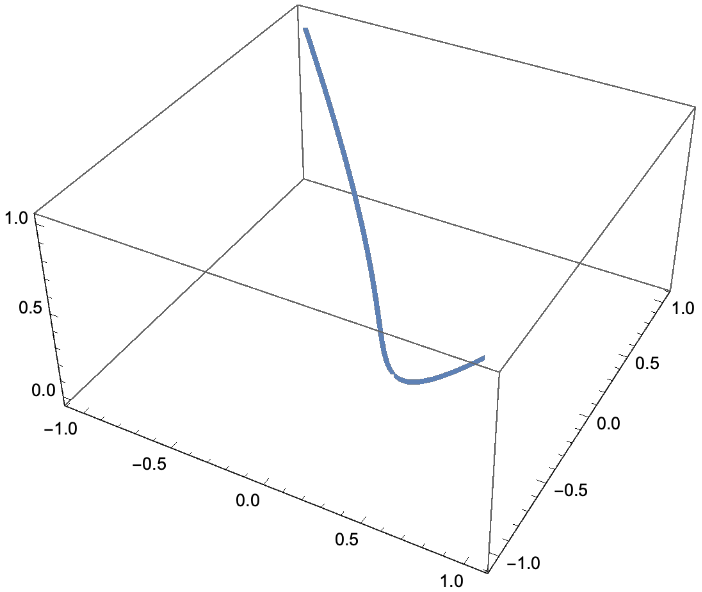
In[∘]:=
```
1/(8 a)
```

Out[∘]= -0.0845198

In[∘]:=
```
x[y_] := 1/(8 a) (2 ArcSinh[2 y] + Sinh[2 ArcSinh[2 y]]);
```

In[•]:=
```
ParametricPlot3D[{x[y], y, y^2}, {y, -1, 1}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

15.3

Wir betrachten den Weg eines Lichtstrahls durch ein Material mit ortsabhängigem Brechungsindex n(x,y)=1+x. Nach dem Fermatschen Prinzip muss dabei das Integral

$$\int_A^B n(x, y)\, ds$$

minimal sein. Wie verläuft so ein Lichtstrahl in der (x,y)-Ebene von A=(0,0) nach B=(1,1)?

Lösungsweg

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$\frac{d}{dx}\frac{(1+x)\, y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

$$\longrightarrow \quad (1+x)\, y' = c\sqrt{1+y'^2} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{(1+x)}{c}\right)^2 y'^2 = 1+y'^2$$

Dies ergibt

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(1+x)}{c}\right)^2 - 1}}$$

Wir haben dabei nur den positiven Wert der Quadratwurzel berücksichtigt, da ein Vorzeichenwechsel ohne Singularität nicht möglich ist, und hat als Randbedingung, dass y am Ende des Weges größer als zu Beginn ist.
Wir müssen integrieren

$$y + \beta = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{(1+x)}{c}\right)^2 - 1}}\, dx$$

Mit $u = \frac{(1+x)}{c}$ und u>1 (daher 1>c) ergibt das

$$y + \beta = c \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}}\, du = c\,\text{ArcCosh}[u] = c\,\text{ArcCosh}\left[\frac{(1+x)}{c}\right]$$

Die Anfangsbedingungen ergeben

$$A:\ \beta = c\,\text{ArcCosh}\left[\frac{1}{c}\right]$$

$$B:\ 1 + \beta = c\,\text{ArcCosh}\left[\frac{2}{c}\right]$$

Daraus (Umbenennung: 1/c=a) folgt die Gleichung

a=ArcCosh[2 a]-ArcCosh[a]

In[∘]:= `FindRoot[a == ArcCosh[2 a] - ArcCosh[a], {a, 1.05}]`

Out[∘]= {a → 1.05264}

Das ist wie gewünscht >1 (c<1). Die andere Konstante ist daher

In[∘]:= `c = 1 / a /. %`

Out[∘]= 0.949989

In[∘]:= $b = c\,\text{ArcCosh}\left[\frac{1}{c}\right]$

Out[∘]= 0.306917

Die Lösung lautet somit

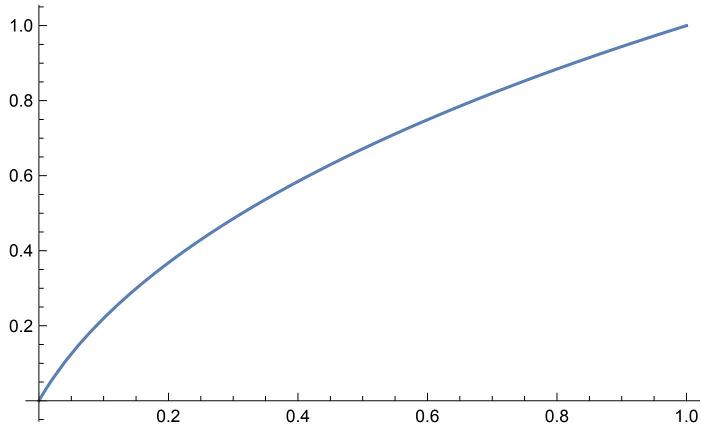
In[∘]:= $y[x\_] = -b + c\,\text{ArcCosh}\left[\frac{(1+x)}{c}\right]$

Out[∘]= -0.306917 + 0.949989 ArcCosh[1.05264 (1 + x)]

Und der Lichtweg durchs Medium verläuft wie folgt:

In[•]:=
```
Plot[y[x], {x, 0, 1}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

15.4

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und die Beltrami-Gleichung für folgendes Problem:
Gesucht ist eine Rotationsfläche kleinster Fläche (Rotation um die z-Achse), die durch Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ bei z_1 und $x^2 + y^2 = b^2$ bei $z_2$begrenzt wird.
(b) Lösen Sie das Problem.

Lösungweg

Die Rotationsfläche entsteht durch Rotation einer Kurve in der (y,z)-Ebene: y=r(z), die durch die Punkte r(z_1)=a und r(z_2)=b geht, um die z-Achse.

Die Fläche eines Streifens ist daher

$$dA = 2\pi r(z)\sqrt{(dz)^2 + (dy)^2} = 2\pi r\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}\, dz$$

Das zu minimierende Funktional ist

In[•]:= $A = 2\pi \int r\sqrt{1 + r'^2}\, dz$

Out[•]= $2\pi r z\sqrt{1 + (r')^2}$

Das der Integrand nicht von z abhängt, verwenden wir die Euler-Langrange Gleichung in der Beltrami-Formulierung:

$$r\sqrt{1 + r'^2} - r'\,\partial_{r'}\, r\sqrt{1 + r'^2} = c$$

$$r\sqrt{1 + r'^2} - \frac{r\, r'^2}{\sqrt{1 + r'^2}} = c$$

Dies ergibt

$$r\left(1 + r'^2\right) - r\, r'^2 = c\sqrt{1 + r'^2}$$

$$r^2 = c^2\left(1 + r'^2\right)$$

$$r'^2 = \frac{r^2}{c^2} - 1$$

$$c\, r' = \sqrt{r^2 - c^2}$$

$$\int \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \, dr = \int dz$$

Integration ergibt

$$c \operatorname{ArcCosh}\left[\frac{r}{c}\right] = z + d$$

und nach Umkehrung

In[•]:=
```
r[z_] = c Cosh[(z + d)/c];
```

Wir berücksichtigen die Randbedingungen:

$$\operatorname{Cosh}\left[\frac{z_1 + d}{c}\right] = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{Cosh}\left[\frac{z_2 + d}{c}\right] = \frac{b}{c}$$

Offenbar spielt c die Rolle der Längeneinheit und wir können die Werte für r, z und d einfach in Einheiten von c festlegen.

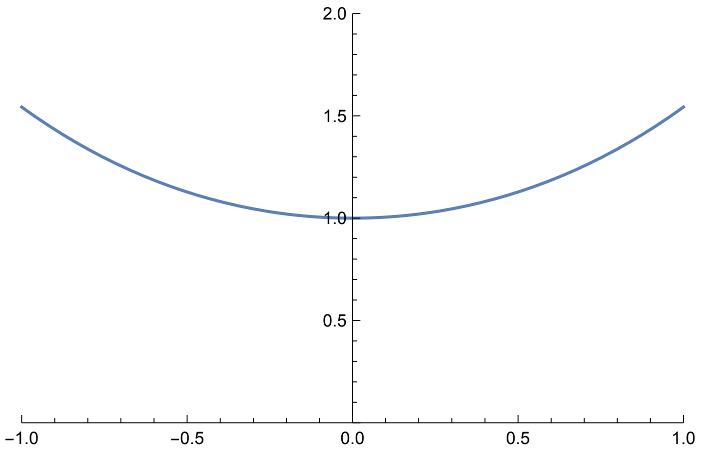
Wir wählen zu Illustration

$z_1 / c = 1,\ z_2 / c = -1,\ a / c = b / c = \operatorname{Cosh}[1]$

Dann ergibt sich d=0 und die Kurve hat die Form

In[•]:=
```
Plot[r[z] /. {c → 1, d → 0}, {z, -1, 1}, PlotRange → {{-1, 1}, {0, 2}}]
```

Out[•]=



Die Drehfläche sieht wie folgt aus:

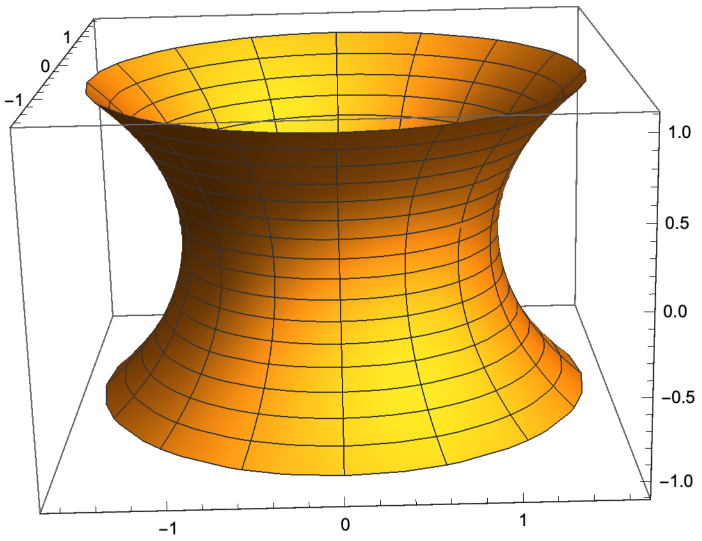
In[•]:=
```
c ArcCosh[r/c] - a /. {c → 1, a → 0}
```

Out[•]= ArcCosh[r]

In[•]:=
```
N[ArcCosh[2]]
```

Out[•]= 1.31696

In[∘]:=
```
r[z]
```
Out[∘]= $c \, \text{Cosh}\left[\frac{d+z}{c}\right]$

In[∘]:=
```
RevolutionPlot3D[r[z] /. {c → 1, d → 0}, {z, -1, 1},
  RevolutionAxis → {1, 0, 0}, ViewPoint -> {0.945, 0.024, -3.249}]
```
Out[∘]=


In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

15.5

Berechnen Sie die Form einer Kette fester Länge L, aufgehängt zwischen zwei Punkten A und B unter Einfluss der Schwerkraft.

Lösungsweg

Die Lösung ist die berühmte "Katenarie", auch Katenoide oder Kettenlinie genannt. 1669 bewies Jungius , dass Galileis Vermutung, die Kurve sei eine Parabel, nicht stimmt. Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli fanden 1691 die richtige Lösung! Die Lösung minimiert auch die Oberfläche eines Seifenfilm mit zwei Begrenzungkreisen, wie in Aufgabe 15.4.

Hier folgt die Ableitung des Funktionals:

Die Form der Kette sei y(s); die gesamte potenzielle Energie ist dann

$$\int_0^L \rho(s)\, g\, y(s)\, ds$$

wobei g die Erdbeschleunigung und ρ(s) die Massendichte der Kette ist. Die Nebenbedingung lautet einfach

$$\int_0^L ds = L.$$

Wir wählen als Randpunkte (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Punkte A=(0,0) und B=(a,b). Es reicht also, einfach das Integral zusammen mit der Nebenbedingung

$$\int_0^L (\lambda + y(s))\, ds = \int_{x(s=0)=0}^{x(s=L)=a} (\lambda + y)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

zu extremalisieren und die Randbedingungen danach zu berücksichtigen.

$L - r' \partial_{r'} L = c$

Damit wird

$L = (\lambda + y)\sqrt{1 + y'^2}$

zur Bestimmung der Euler-Lagrange-Gleichung genommen.

Der Rechengang verläuft analog zu Aufgabe 15.5. In Beltrami-Form lautet die DG

$$(\lambda + y(s))\sqrt{1 + y'^2} - \frac{(\lambda + y(s))\, y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

Dies ergibt

$$(\lambda + y)\left(1 + y'^2\right) - (\lambda + y)\, y'^2 = c\sqrt{1 + y'^2}$$
$$\lambda + y = c\sqrt{1 + y'^2}$$
$$(\lambda + y)^2 = c^2\left(1 + y'^2\right)$$
$$y'^2 = \frac{(\lambda + y)^2}{c^2} - 1$$
$$c\, y' = \pm\sqrt{(\lambda + y)^2 - c^2}$$

Wir müssen hier beide Möglichkeiten berücksichtigen. Wenn die Lösung stetig sein soll, so kann das Vorzeichen nur bei **λ**+y=± c wechseln.

$$\int \frac{c}{\sqrt{(\lambda + y)^2 - c^2}}\, dy = \int dx$$

Integration ergibt

$$c\, \mathrm{ArcCosh}\left[\frac{\lambda + y}{c}\right] = x + d$$

und nach Umkehrung

$$y[x] = c\, \mathrm{Cosh}\left[\frac{x + d}{c}\right] - \lambda;$$

(Anmerkung: eine alternative Form der Funktion $\mathrm{ArcCosh}\left[\frac{\lambda+y}{c}\right]$ ist

auch $\mathrm{Log}\left[y + \lambda + \sqrt{-c^2 + (y + \lambda)^2}\right]$.)

Wir setzen die Randbedingungen ein:

$$A: \frac{\lambda}{c} = \mathrm{Cosh}\left[\frac{d}{c}\right];$$
$$B: \frac{b}{c} + \frac{\lambda}{c} = \mathrm{Cosh}\left[\frac{a + d}{c}\right]$$

Subtraktion erlaubt es , den Lagrangeschen Multiplikator zu eliminieren:

$$\longrightarrow \frac{b}{c} = \mathrm{Cosh}\left[\frac{a}{c} + \frac{d}{c}\right] - \mathrm{Cosh}\left[\frac{d}{c}\right]$$

und mittels Additionstheorem

$$\cosh(\alpha) - \cosh(\beta) = 2\, \mathrm{Sinh}\left[\frac{\alpha + \beta}{2}\right] \mathrm{Sinh}\left[\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

ergibt das

$$(a)\quad \frac{b}{c} = 2\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{a+2\,d}{2\,c}\right]\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{2\,c}\right]$$

Die Integrationskonstanten d und c sind noch zu bestimmen.

Wie geht es hier weiter? Wir müssen auch die Nebenbedingung (Länge der Kette) berücksichtigen und berechnen diese daher

$$y' = \mathrm{Sinh}\left[\frac{x+d}{c}\right] \longrightarrow \sqrt{1+y'^2} = \mathrm{Cosh}\left[\frac{x+d}{c}\right]$$

Die Integration von 0 bis a ergibt die Nebenbedingung

$$\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{c}+\frac{d}{c}\right] - \mathrm{Sinh}\left[\frac{d}{c}\right] = \frac{L}{c}$$

oder

$$\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{c}+\frac{d}{c}\right] + \mathrm{Sinh}\left[\frac{-d}{c}\right] = \frac{L}{c}$$

und mit dem Additionstheorem

$$\mathrm{Sinh}\,(\alpha) + \mathrm{Sinh}\,(\beta) = 2\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\,\mathrm{Cosh}\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

ergibt das

$$(b)\quad \frac{L}{c} = 2\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{2\,c}\right]\,\mathrm{Cosh}\left[\frac{a+2\,d}{2\,c}\right]$$

Durch Division von (a)/(b) erhält man

$$\frac{b}{L} = \mathrm{Tanh}\left[\frac{a+2\,d}{2\,c}\right]$$

Wir sehen, dass offenbar |b|<L sein muss: die Kette muss lang genug sein, damit es klappt!
Wir lösen die Beziehung nach dem Argument des Tanh auf (die Funktion ist eindeutig):

$$(b')\quad \frac{a+2\,d}{2\,c} = \mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right]$$

und setzen das Ergebnis zum Beispiel in (b) ein:

$$\frac{L}{c} = 2\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{2\,c}\right]\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right]\right]$$

In dieser Gleichung ist nur c unbekannt. Leider ist die Gleichung transzendent und kann nur numerisch gelöst werden. Dazu formt man am besten um:

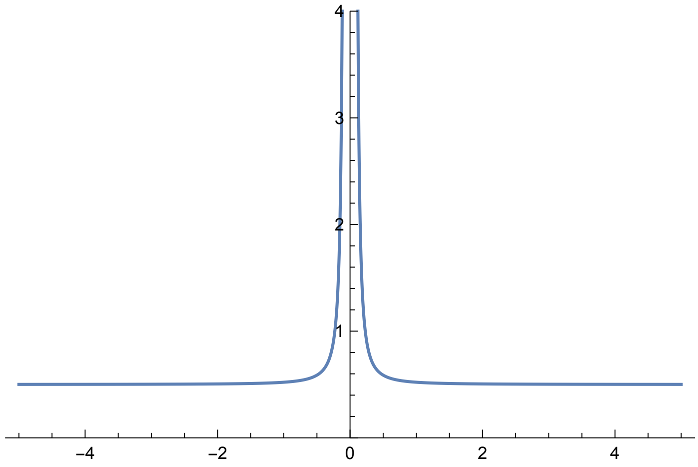
$$(c)\quad \frac{L}{2\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right]\right]} = c\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{a}{2\,c}\right]$$

und sucht für die Funktion von c auf der rechten Seiten den Wert, für den der Funktionswert links angenommen wird. Wenn c bekannt ist, kann man d aus (d') bestimmen.

Die Funktion rechts hat eine typische Form, die wir hier zum Beispiel für a=1 skizzieren wollen:

In[•]:= `Plot[c Sinh[1/(2 c)], {c, -5, 5}, PlotRange → {0, 4}]`

Out[•]=



Sie ist nach unten mit a/2 beschränkt, das ergibt also eine weitere Bedingung für die Existenz einer Lösung, die wiederum das Verhältnis von Länge L und Randbedingung betrifft.

$$\frac{L}{2\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right]\right]} > \frac{a}{2}$$

oder

$$L > a\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right]\right]$$

Soweit ist der Lösungsgang klar. Wir wollen zur Illustration noch explizite Werte betrachten:

L=10, a=3, b=6

Wir lösen (c)

$$\frac{10}{2\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{6}{10}\right]\right]} = c\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{3}{2\,c}\right]$$

Da die Funktion von c symmetrisch ist, gibt es immer zwei (entgegengesetzte) Lösungen:

In[•]:= $\mathrm{FindRoot}\left[\frac{10}{2\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{6}{10}\right]\right]} == c\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{3}{2\,c}\right], \{c, 1\}\right]$

Out[•]= {c → 0.564846}

In[•]:= `cval[1] = 0.5648456902620852`;`

In[•]:= $\mathrm{FindRoot}\left[\frac{10}{2\,\mathrm{Cosh}\left[\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{6}{10}\right]\right]} == c\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{3}{2\,c}\right], \{c, -1\}\right]$

Out[•]= {c → -0.564846}

In[•]:= `cval[2] = -0.5648456902620852`;`

Mittels (d') bestimmen wir daraus den Wert von d:

$$(b')\quad d = c\,\mathrm{ArcTanh}\left[\frac{b}{L}\right] - \frac{a}{2}$$

Erste Lösung:

In[•]:=
```
dval[1] = cval[1] ArcTanh[6/10] - 3/2
```
Out[•]= -1.10848

In[•]:=
```
lambda[1] = cval[1] Cosh[dval[1]/cval[1]]
```
Out[•]= 2.04961

Zweite Lösung:

In[•]:=
```
dval[2] = cval[2] ArcTanh[6/10] - 3/2
```
Out[•]= -1.89152

In[•]:=
```
lambda[2] = cval[2] Cosh[dval[2]/cval[2]]
```
Out[•]= -8.04961

Diese Länge ist negativ, es handelt sich, wie wir weiter unten sehen, um das Maximum (wenn die Schwerkraft nach unten zeigt). Wir suchen aber das Minimum.

Die Lösungskurve lautete

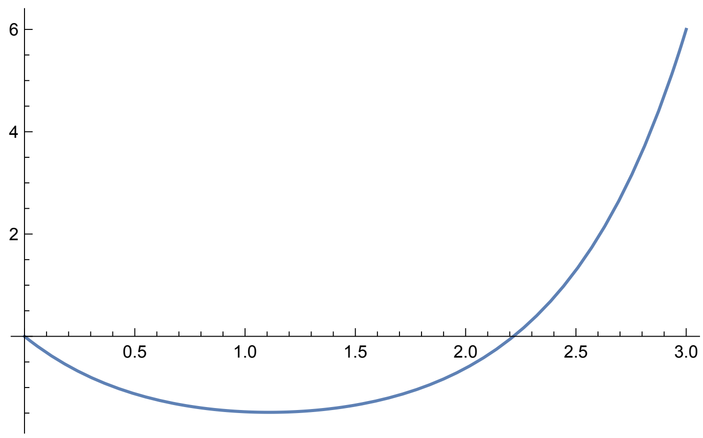
$$y[x] = c \operatorname{Cosh}\left[\frac{x+d}{c}\right] - \lambda;$$

Für die beiden Lösungsvarianten erhalten wir

c>0:

In[•]:=
```
y[x_] = cval[1] Cosh[(x + dval[1])/cval[1]] - lambda[1]
```
Out[•]= -2.04961 + 0.564846 Cosh[1.7704 (-1.10848 + x)]

In[•]:=
```
Plot[y[x], {x, 0, 3}, PlotRange → All]
```
Out[•]=



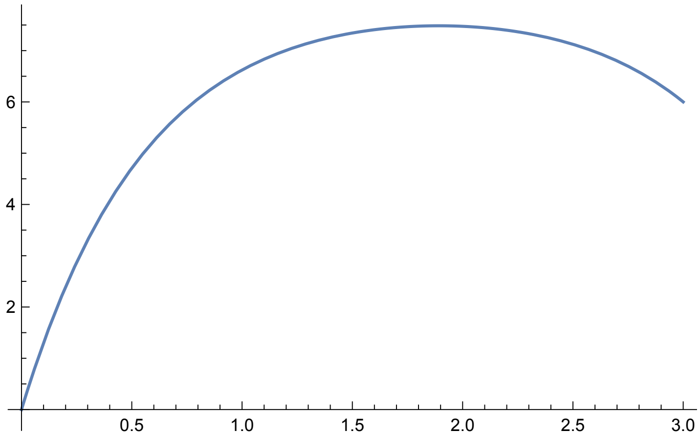
c<0:

In[∘]:= `y[x_] = cval[2] Cosh[(x + dval[2])/cval[2]] - lambda[2]`

Out[∘]= $8.04961 - 0.564846 \operatorname{Cosh}[1.7704 (-1.89152 + x)]$

In[∘]:= `Plot[y[x], {x, 0, 3}, PlotRange → All]`

Out[∘]=



In der Tat ist diese Lösung die falsche.

Symmetrischer Fall

Eine Vereinfachung ergibt sich im symmetrischen Fall, wenn die beiden Punkte die Koordinaten (0,0) und (a,0) haben, das Ergebnis also symmetrisch zu (a/2,0) ist.

Gleichung (a) wird dann zu

$$(a)\quad 0 = 2 \operatorname{Sinh}\left[\frac{a + 2 d}{2 c}\right] \operatorname{Sinh}\left[\frac{a}{2 c}\right] \longrightarrow d = -a / 2$$

und so ist d schon festgelegt. Die Nebenbedingung (b) wird

$$(b)\quad L = 2 c \operatorname{Sinh}\left[\frac{a}{2 c}\right]$$

und wird wiederum numerisch gelöst.

Als Beispiel können wir a=1 und L=2 wählen und erhalten:

In[∘]:= `FindRoot[2 == 2 c Sinh[1/(2 c)], {c, 0.25}]`

Out[∘]= `{c → 0.22964}`

$$\lambda = c \operatorname{Cosh}\left[\frac{1}{2 c}\right] \text{ oder, numerisch,}$$

In[∘]:= `λ = 0.22964021507761154` Cosh[1/(2 × 0.22964021507761154`)]`

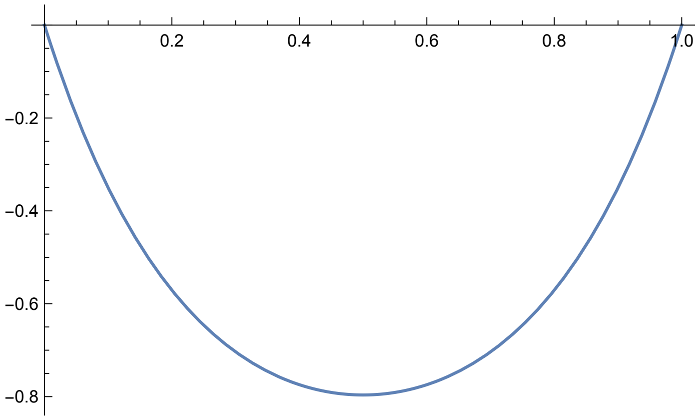
Out[∘]= `1.02603`

In[•]:= `y[x_] = 0.22964021507761154` Cosh[(x - 1/2)/0.22964021507761154] - λ`

$$y[x\_] = 0.22964021507761154\grave{}\ \mathrm{Cosh}\left[\frac{x-1/2}{0.22964021507761154}\right] - \lambda$$

Out[•]= $-1.02603 + 0.22964\ \mathrm{Cosh}\left[4.35464\left(-\frac{1}{2}+x\right)\right]$

In[•]:= `Plot[y[x], {x, 0, 1}, PlotRange → All]`

Out[•]= 

(Die zweite Lösung mit c<0 haben wir nicht berücksichtigt, da sie dem Maximum entspricht: die Kette "hängt" nach oben!)

In[•]:= `ClearAll["Global`*"];`

15.6

Lösen Sie mittels Laplace-Transformation die Newtonsche Bewegungsgleichung m $\ddot{y}$ =f(t) für den Fall eines Kraftstoßes f(t)=c δ(t-ε) im Grenzfall $\varepsilon\to 0$; die Anfangsbedingungen lauten y(0)=$\dot{y}$(0)=0.

Lösungsweg

Die Laplace-Transformierten von y(t) sei Y(p), dann ist (vgl. M.13.1)

$$L(\ddot{y}) = p^2\, Y - p\, y(0) - \dot{y}(0) = p^2\, Y$$

$$L(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} L(c\,\delta(t-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} c\, e^{-\varepsilon p} = c \text{ für } p > 0$$

Die DG transformiert daher zu

$$m\, s^2\, Y(p) = c$$

$$\to Y(p) = \frac{c}{m}\,\frac{1}{p^2} \quad \text{mit } p > 0$$

$$\to y(t) = \frac{c}{m}\, t\,.$$

Das ist einfach eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wir haben dabei die Beziehung

$$L\left(t^k\right) = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}} \quad \text{für } k > -1,\ \mathrm{Re}(p) > 0$$

für k=1verwendet

```
ClearAll["Global`*"];
```

15.7

Welchen Wert haben die Integrale

(a) $\int_0^{10} dx\ x^2\,\delta(\cos(x))$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2}\,\delta\left(4\ x^2-1\right)$,

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-a\,x}\,\delta^{(n)}(x)$.

Lösungsweg

(a)

Das Argument der Diracschen Deltafunktion hat im betrachteten Integrationsintervall Nullstellen bei x=π/2, 3π/2 und 5π/2. Der Wert von |cos(x)'|=1. Daher ist

$$\int_0^{10} dx\ x^2\,\delta(\cos(x)) = \sum_{k=0}^{2}\left(\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2}\right)^2 = \frac{35\,\pi^2}{4}$$

(b)

Das Argument der Diracschen Deltafunktion hat im betrachteten Integrationsintervall Nullstellen bei x=±1/2. Der Wert von
|$(4x^2-1)$'|=|8 x|=4. Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2}\,\delta\left(4\ x^2-1\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2}\,\frac{1}{4}\left[\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{1}{4}}+e^{-\frac{1}{4}}\right] = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{4}}$$

(c)

Laut M.13.2 ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-a\,x}\,\delta^{(n)}(x) = (-1)^n\,\frac{d^n\,e^{-a\,x}}{d\,x^n}\,\Big|_{x=0}$$
$$= (-1)^n\,(-a)^n = a^n\ .$$

Hinweis

Dieses Ergebnis stimmt:

```
Integrate[x² DiracDelta[Cos[x]],
    {x, 0, 10}]
```

$$\frac{35\,\pi^2}{4}$$

Mit der allgemeinen n-ten Ableitung gibt es Probleme:

In[•]:=
```
Integrate[E^(-a x) D[DiracDelta[x], {x, n}], {x, -∞, ∞}]
```

Out[•]= $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x}\,\mathrm{DiracDelta}^{(n)}[x]\,dx$

Wohl aber funktioniert es mit einer festen Ableitungsordnung:

In[•]:=
```
Integrate[E^(-a x) DiracDelta''[x], {x, -∞, ∞}]
```

Out[•]= a^2

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```