Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 16. Operatoren und Eigenwerte

16.1

Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

einen 2-dimensionalen Raum aufspannen, und geben Sie Eigenwerte und eine Basis dafür an.

Lösungsweg

Diese Matrix ist einfach 2-mal die Einheitsmatrix. Sie hat den (zweifach entarteten) Eigenwert λ=2. Der aufgespannte Raum hat die Dimension 2 und die Basisvektoren (Eigenvektoren) sind frei wählbar, sofern sie nur unabhängig sind.

Beispiel:

In[∘]:= $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

Diese beiden Vektoren sind Eigenvektoren:

In[∘]:= $\texttt{TraditionalForm[M.}e_1\texttt{]}$

Out[∘]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[•]:= `TraditionalForm[M.e2]`

Out[•]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aber auch die folgenden beiden Vektoren sind es (obwohl sie nicht orthogonal gewählt wurden):

In[•]:= $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

In[•]:= `TraditionalForm[M.e1]`

Out[•]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In[•]:= `TraditionalForm[M.e2]`

Out[•]//TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was liefert Mathematica? Wir finden:

In[•]:= `Eigensystem[M]`

Out[•]= `{{2, 2}, {{0, 1}, {1, 0}}}`

Die Vektoren werden also orthogonal und möglichst einfach gewählt.

In[•]:= `ClearAll["Global`*"];`

16.2

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösungsweg

Alle Matrizen sind reell symmetrisch (hermitisch) und haben daher reelle Eigenwerte mit (zu verschiedenen Eigenwerten) orthogonalen Eigenvektoren. Wir werden die Eigenvektoren hier nicht auf Betrag 1 normierten.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

In[•]:=
```
A = {{1, 3, 0}, {3, -2, -1}, {0, -1, 1}}; Unitmatrix = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
Polynom = Det[A - λ Unitmatrix ]
```
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ \text{Unitmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Out[•]= $-12 + 13\lambda - \lambda^3$

In[•]:=
```
Solve[Polynom == 0]
```
Out[•]= $\{\{\lambda \to -4\}, \{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to 3\}\}$

Die drei Eigenwerte sind nicht entartet, die Eigenvektoren werden daher orthogonal sein.

λ=-4

In[•]:=
```
Solve[(A - (-4) Unitmatrix).{x, y, z}
        == {0, 0, 0}]
```
Out[•]= $\left\{\left\{y \to -\frac{5\,x}{3},\ z \to -\frac{x}{3}\right\}\right\}$

e1 = (-3, 5, 1)

λ=1

In[•]:=
```
Solve[(A - (1) Unitmatrix).{x, y, z}
        == {0, 0, 0}]
```
Out[•]= $\{\{y \to 0,\ z \to 3\,x\}\}$

e2 = (1, 0, 3)

λ=3

In[•]:=
```
Solve[(A - (3) Unitmatrix).{x, y, z}
        == {0, 0, 0}]
```
Out[•]= $\left\{\left\{y \to \frac{2\,x}{3},\ z \to -\frac{x}{3}\right\}\right\}$

e3 = (-3, -2, 1)

Mit *Mathematica* geht es auch direkt:

In[•]:=
```
Eigensystem[A]
```
Out[•]= {{-4, 3, 1}, {{-3, 5, 1}, {-3, -2, 1}, {1, 0, 3}}}

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In[•]:=
```
A = {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}}; Unitmatrix = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
Polynom = Det[A - λ Unitmatrix ]
```
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \text{Unitmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Out[•]= $\lambda - \lambda^3$

Die Eigenwerte sind also 0 und ±1. Der erste Eigenvektor (zu λ=0) ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to y = 0,\ x = 0,\ z\,\text{unbestimmt}$$

und wir können daher e1={0,0,1} setzen.

Der zweite Eigenvektor (zu λ=1) ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x=y,\ z=0$$

und wir können daher e2={1,1,0} setzen.

Der dritte Eigenvektor (zu λ=-1) ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x=-y,\ z=0$$

und wir können daher e3={1,-1,0} setzen.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

```
In[•]:= A = (1 0 0
             0 0 1
             0 1 0); Unitmatrix = (1 0 0
                                  0 1 0
                                  0 0 1);
        Polynom = Det[A - λ Unitmatrix ]
```

Out[•]= $-1+\lambda+\lambda^2-\lambda^3$

```
In[•]:= Solve[Polynom == 0]
```

Out[•]= {{λ → -1}, {λ → 1}, {λ → 1}}

Hier ist ein Eigenwert zweifach entartet.

Der Eigenvektor zum Eigenwert λ=-1 ergibt sich als

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x=0,\ y=-z$$

e1 = (0, −1, 1)

Die beiden anderen Eigenwerte müssen den dazu orthogonalen zweidimensionalen Unterraum aufspannen. Man kann also beliebige, zu e1 orthogonal, voneinander unabhängige Vektoren verwenden.

Einen Hinweis bekommen wir durch die Bestimmungsgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x=\text{beliebig},\ y=z$$

Eine mögliche Wahl ist also

e2 = {1, 0, 0}, e3 = {0, 1, 1}.

Aber auch e2={1,1,1}, e3={2,1,1} wären erlaubt. Die erste Wahl hat allerdings den Vorteil der Orthogonalität.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

In[∘]:=
```
A = {{1, 1, 1}, {1, 1, 1}, {1, 1, 1}}; Unitmatrix = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
Polynom = Det[A - λ Unitmatrix]
```

Out[∘]= $3\lambda^2 - \lambda^3$

Eigenwerte: 0, 0 und 3. Ein Eigenwert ist daher zweifach entartet.

Eigenwert λ=0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x + y + z = 0$$

Die beiden Eigenwerte müssen also in dieser Ebene (x+y+z=0) liegen und unabhängig sein, sonst beliebig. Wir wählen

e1 = {1, 1, -2};
e2 = {1, -1, 0}.

Eigenwert λ=3:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = z,\ y = z,\ z \text{ beliebig}$$

e3 = {1, 1, 1}.

Mathematica liefert

In[∘]:=
```
Eigensystem[A]
```

Out[∘]= {{3, 0, 0}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}

Das Ergebnis ist richtig, aber die ersten beiden Eigenvektoren wurden nicht zueinander orthogonal gewählt.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

16.3

Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ zumindest einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$ hat.

Lösungsweg

Da es sich um eine reelle, symmetrische Matrix handelt, sind beide Eigenwerte reell und die Eigenvektoren orthogonal.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall α=nπ. Die Matrix hat dann eine der beiden Formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten ±1 und den Eigenvektoren {1,0} und {0,1}

Für $\alpha \neq n\pi$ finden wir

$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix}\cos\alpha-\lambda & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha-\lambda\end{pmatrix}\right]=0\to$$

$\lambda^2 - (\cos\ \alpha)^2 - (\sin\ \alpha)^2 = 0$

$\lambda^2 = 1\ \to \lambda = \pm 1$

Die Eigenwerte sind also nicht entartet. Wir berechnen die Eigenvektoren:

λ=1

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha-1 & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x\cos\alpha - x + y\sin\alpha = 0$$

$$\to x = y\,\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\mathrm{e1}=\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},1\right)$$

λ=-1

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha+1 & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x\cos\alpha + x + y\sin\alpha = 0$$

$$\to x = -y\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\ (\text{da } \cos\alpha \neq -1)$$

$$\mathrm{e2}=\left(\frac{\sin\alpha}{-1-\cos\alpha},1\right)$$

Die beiden Eigenvektoren sind reell und zueinander orthogonal:

$$\left(\frac{\mathrm{Sin}[\alpha]}{-1-\mathrm{Cos}[\alpha]},1\right).\left(\frac{\mathrm{Sin}[\alpha]}{1-\mathrm{Cos}[\alpha]},1\right)$$

$$=1+\frac{\mathrm{Sin}[\alpha]^2}{(-1-\mathrm{Cos}[\alpha])\,(1-\mathrm{Cos}[\alpha])}$$

$$=1+\frac{\mathrm{Sin}[\alpha]^2}{\mathrm{Cos}[\alpha]^2-1}=0$$

```
In[]:= ClearAll["Global`*"];
```

16.4

Zeigen Sie, dass $(A\,B)^\dagger$=$B^\dagger\,A^\dagger$ sowohl für (a) Operatoren, als auch (b) in Matrixdarstellung.

Lösungsweg

Operatoren:

$$\left((AB)^\dagger f,\ g\right) = (f,\ (A\,B)\ g) = (f,\ A\,B\,g)$$
$$= (f,\ A\,(B\,g)) = \left(A^\dagger f,\ (B\,g)\right)$$
$$= \left(A^\dagger f,\ B\,g\right) = \left(B^\dagger A^\dagger f,\ g\right)$$
$$\to (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger\ .$$

Matrizen:

$C^\dagger = \overline{C}^T$ or $\left(C^\dagger\right)_{ik} = \overline{(C)_{ki}}$

$$\left((A\,B)^{\dagger}\right)_{ik} = \overline{(A\,B)_{ki}} = \overline{\sum_j (A)_{kj}\,(B)_{ji}}$$
$$= \sum_j \overline{(A)_{kj}}\,\overline{(B)_{ji}} = \sum_j \left(A^{\dagger}\right)_{jk}\,\left(B^{\dagger}\right)_{ij}$$
$$= \sum_j \left(B^{\dagger}\right)_{ij}\,\left(A^{\dagger}\right)_{jk} = \left(B^{\dagger}\,A^{\dagger}\right)_{ik}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

16.5

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen (vgl. M.16.1)

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$

Lösungsweg

(a)

Ist diese Matrix "normal"? Wir berechnen den Kommutator

In[∘]:= $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

```
A.Transpose[A] - Transpose[A].A
```

Out[∘]= {{1, -1, 2}, {-1, -4, -9}, {2, -9, 3}}

Die Matrix ist also nicht normal und wir können keine orthogonalen Eigenvektoren erwarten.

In[∘]:= Det[A - λ {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}]

Out[∘]= $12 - 16\,\lambda + 7\,\lambda^2 - \lambda^3$

In[∘]:= Solve$\left[12 - 16\,\lambda + 7\,\lambda^2 - \lambda^3 == 0\right]$

Out[∘]= $\{\{\lambda \to 2\}, \{\lambda \to 2\}, \{\lambda \to 3\}\}$

Der Eigenwert 2 ist zweifach entartet. Wir berechnen die Eigenvektoren:

λ=3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ e1 = (1, 1, -2)

λ=3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ e2 = (1, 0, 0)

Einen weiteren Eigenvektor gibt es nicht, der Eigenraum($\mathbb{R}^2$) ist also nur zweidimensional!

Dies wird auch von *Mathematica* erkannt, das den entsprechenden (fehlenden) Eigenvektor als Nullvektor angibt.

In[∘]:=
```
Eigensystem[A]
```

Out[∘]=
```
{{3, 2, 2}, {{-1, -1, 2}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

(b)

$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right] = (1-\lambda)^2 = 0 \to \lambda = 1$

Der Eigenwert ist zweifach entartet. Wie sieht der Eigenvektor aus?

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x$ beliebig, $y = 0$,

zum Beispiel $\text{e1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Eigenraum ist hier nur eindimensional:

$\text{Kern}\,(A - 1) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{\text{e1}\}.$

Mathematica hat dazu eine eigene Funktion:

In[∘]:=
```
NullSpace[(0 a
           0 0)]
```

Out[∘]=
```
{{1, 0}}
```

Dieses Ergebnis (eindimensionaler Eigenraum) darf uns nicht wundern. Die Matrix ist nicht "normal", das heißt, der Kommutator mit ihrer Transponierten verschwindet nicht:

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

16.6

Das Skalarprodukt in einem Vektorraum sei

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} f(x)\, g(x)\,,$$

der Raum umfasse alle integrablen, differenzierbaren Funktionen, für die (f,f) beschränkt ist. Konstruieren Sie den zu A= (x - $\frac{d}{dx}$) adjungierten Operator $A^\dagger$.

Lösungsweg

Dazu betrachten wir die Definition des adjungierten Operators:

$$\begin{aligned}
(A^\dagger f, g) &= (f, A g) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} f(x) \left[\left(x - \frac{d}{dx}\right) g(x)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} x\, f(x)\, g(x) - \\
&\qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x^2} f(x) \left[\frac{d}{dx} g(x)\right]
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2} \, x \, f(x) \, g(x) - e^{-x^2} f(x) \left[\frac{d}{dx} g(x) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} f(x) \right) \right] g(x)$$

Wir haben partiell integriert. Der mittlere Term verschwindet für den betrachteten Raum (sonst könnten die Funktionen nicht endliche Norm haben!). Die weitere Rechnung ergibt

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2} \, x \, f(x) \, g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-2 \, x \, e^{-x^2} f(x) + e^{-x^2} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \right] g(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2} \left[\left(-x + \frac{d}{dx} \right) f(x) \right] g(x)$$

$$= \left(-\left(x - \frac{d}{dx} \right) f, \, g \right) = \left(A^{\dagger} f, \, g \right)$$

$$\to A^{\dagger} = -A \; .$$

(Es handelt sich um einen antihermitischen Operator.)

In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```