Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 17. Spezielle Differenzialgleichungen

17.1

Berechnen Sie die ersten fünf Legendre-Polynome aus der Formel von Rodrigues und bestimmen Sie deren Nullstellen (gegebenenfalls mit einer numerischen Methode).

Lösungsweg

Formel von Rodrigues:

In[∘]:= `Polynom[k_, x_] := Expand[` $\frac{1}{2^k\,k!}$ `D[(x^2 - 1)^k, {x, k}]];`

In[∘]:= `P[0, x_] = Polynom[0, x]`

Out[∘]= 1

..hat keine Nullstellen.

In[∘]:= `P[1, x_] = Polynom[1, x]`

Out[∘]= x

Nullstelle: x=0

In[∘]:= `P[2, x_] = Polynom[2, x]`

Out[∘]= $-\frac{1}{2}+\frac{3\,x^2}{2}$

Nullstellen: x=±1/$\sqrt{3}$

In[•]:=
```
P[3, x_] = Polynom[3, x]
```

Out[•]= $-\frac{3\,x}{2}+\frac{5\,x^3}{2}$

Nullstellen: x=0, ±1/$\sqrt{\frac{3}{5}}$

In[•]:=
```
P[4, x_] = Polynom[4, x]
```

Out[•]= $\frac{3}{8}-\frac{15\,x^2}{4}+\frac{35\,x^4}{8}$

Mathematica hat die Legendre Polynome übrigens "eingebaut":

In[•]:=
```
LegendreP[4, x]
```

Out[•]= $\frac{1}{8}\left(3-30\,x^2+35\,x^4\right)$

(Unsere Formel von Rodrigues ist also richtig programmiert.)

In[•]:=
```
Nullstellen = Solve[P[4, x] == 0]
```

Out[•]= $\left\{\left\{x\to-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right\},\left\{x\to\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right\},\left\{x\to-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right\},\left\{x\to\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right\}\right\}$

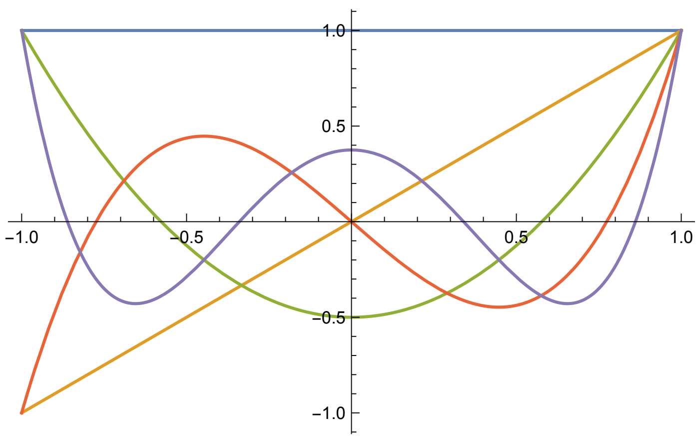
In[•]:=
```
N[Nullstellen]
```

Out[•]= $\{\{x\to-0.339981\},\{x\to0.339981\},\{x\to-0.861136\},\{x\to0.861136\}\}$

Und so sehen die ersten Legendrepolynome aus (Suchbild: was ist was?):

In[•]:=
```
Plot[{P[0, x], P[1, x], P[2, x],
     P[3, x], P[4, x]}, {x, -1, 1}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.2

Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, dass $P_l(1)=1$ und $P_l(-1)=(-1)^l$ gilt.

Lösungsweg

Die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome (M.17.1.5) hat die Form

$$\Phi(x,\ h) = \left(1 - 2\,x\,h + h^2\right)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\, P_{\ell}\,(x)$$

(für |h|<1). Für x=1 wird

$$\Phi(1,\ h) = \left(1 - 2\,h + h^2\right)^{-1/2}$$

$$= (1 - h)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}$$

wie wir aus der Taylorreihe für 1/(1-h) wissen. Alle Koeffizienten der Reihe in h sind 1 und daher (Vergleich mit der Formel darüber) auch die $P_{\ell}(1)$=1. Für x=-1 ergibt sich

$$\Phi(-1,\ h) = \left(1 + 2\,h + h^2\right)^{-1/2}$$

$$= (1 + h)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,(-1)^{\ell}$$

und daher P_l(-1) = $(-1)^l$.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

17.3

Für Legendre-Polynome gilt die Rekursionsformel (M.17.1.4).
Berechnen Sie aus der Kenntnis von P_0(x)=1 und P_1(x)=x die Polynome P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6.

Lösungsweg

Rekursionsformel (M.17.1.4) für m=0 und n+1=k:

```
In[•]:= P[k_, x_] := If[k == 0, 1,
          If[k == 1, x, Expand[1/k ((2 k - 1) x P[k - 1, x] - (k - 1) P[k - 2, x])]]   ];
```

Wir haben diese Rekursionsformel als *Mathematica*-Definition programmiert. Die Funktion wird rekursiv solange aufgerufen, bis k=0 oder 1 ist; in diesen Fällen wird der Wert 1 oder x zurückgegeben.

```
In[•]:= P[0, x]
Out[•]= 1
```

```
In[•]:= P[1, x]
Out[•]= x
```

```
In[•]:= P[2, x]
```

Out[•]= $-\frac{1}{2} + \frac{3\,x^2}{2}$

```
In[•]:= P[3, x]
```

Out[•]= $-\frac{3\,x}{2} + \frac{5\,x^3}{2}$

In[•]:= `P[4, x]`

Out[•]= $\frac{3}{8}-\frac{15\,x^2}{4}+\frac{35\,x^4}{8}$

In[•]:= `P[5, x]`

Out[•]= $\frac{15\,x}{8}-\frac{35\,x^3}{4}+\frac{63\,x^5}{8}$

In[•]:= `P[6, x]`

Out[•]= $-\frac{5}{16}+\frac{105\,x^2}{16}-\frac{315\,x^4}{16}+\frac{231\,x^6}{16}$

Mathematica hat die Legendre Polynome schon "eingebaut":

In[•]:= `LegendreP[6, x]`

Out[•]= $\frac{1}{16}\left(-5+105\,x^2-315\,x^4+231\,x^6\right)$

Unsere Rekursionsformel ist also richtig.

In[•]:= `ClearAll["Global`*"];`

17.4

Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von Rodrigues, dass gilt

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^m\, P_n(x) = 0 \text{ für } m < n.$$

Lösungsweg

Wir definieren zuerst

$$I(m,k,n) = \int_{-1}^{1} dx\, x^m \frac{d^k (x^2-1)^n}{dx^k}.$$

Das zu untersuchende Integral ist (bis auf eine multiplikative Konstante)

$$\int_{-1}^{1} dx\, x^m\, P_n(x) \sim I(m,n,n)$$

und wir integrieren partiell:

$$I(m,n,n) = x^m \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^{1}$$
$$-m \int_{-1}^{1} dx\, x^{m-1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$
$$= -m\, I(m-1, n-1, n)$$

Der erste Term verschwindet,
da bei (n - 1) - facher Ableitung des Terms $(x^2-1)^n$ mindestens ein Faktor $(x^2 - 1)$ übrig bleibt, der an den Grenzen verschwindet.

Da m<n, kann man diesen Vorgang wiederholen,bis m=0 ist und daher auch das Integral verschwindet.

Man hätte ohne partielle Ableitung schneller argumentieren können: die Potenz x^m kann durch die Legendre-Polynome P_0 bis P_m ausgedrückt werden deren Skalarprodukt mit $P_{n>m}$ aber verschwindet.

```
In[●]:= ClearAll["Global`*"];
```

17.5

Man beweise mit Hilfe der Formel von Rodrigues die
Orthogonalität der Legendre-Polynome,

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_m(x)\, P_n(x)\ = 0 \text{ für } m < n.$$

Lösungsweg

Wir drücken im Integral die Legendre-Polynome durch die Rodrigues-Formel aus, vergessen die multiplikativen Konstanten, und erhalten

$$\int_{-1}^{1} dx\ P_m(x)\, P_n(x)\ \sim \int_{-1}^{1} dx\ \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\, \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Dieses Integral integrieren wir partiell, indem wir die Ableitung des rechten Faktors (n) auf den linken "umwälzen":

$$= \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\, \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\ \Big|_{-1}^{1}$$

$$- \int_{-1}^{1} dx\ \frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\, \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

Der erste Term verschwindet, da der Ausdruck

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}[(x-1)^n\,(x+1)^n]}{dx^{n-1}}$$

zumindest eine Nullstelle bei x=1 und -1 hat: die Polynomfaktoren sind der Ordnung n, werden aber nur (n-1) mal abgeleitet!

Damit bleibt wieder ein Integral, das wieder partiell integriert wird, wobei wieder der erste Term verschwindet. Auf diese Art kann man die m. Ableitung des ersten Terms zu einer (2m+1). Ableitung transformieren, da ja m<n ist.Diese Ableitung aber wird null,

$$\frac{d^{2m+1}(x^2-1)^m}{dx^{2m+1}} = \frac{d^{2m+1}(x^{2m} + \ldots x^{2m-1} \ldots \pm 1)}{dx^{2m+1}} = 0\,,$$

da das Polynom nur Terme bis zur Ordnung 2m enthält. Damit ist das gesuchte Ergebnis bewiesen.

Wenn n=m, dann kann man nicht oft genug ableiten und erhält als letztes Integral einen Ausdruck proportional zu

$$\int_{-1}^{1} dx\ (x^2-1)^n \neq 0\,,$$

der ungleich null ist, da der Integrand im Integrationsintervall strikt positiv ist (und nur am Rand verschwindet).

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

17.6

Zeigen Sie für die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome die nachstehende Beziehung und daraus die Gültigkeit der Rekursionsformel:

$(x-h)\,\frac{\partial}{\partial x}\Phi = h\,\frac{\partial}{\partial h}\Phi \;\to\; x\,P_l{}' - P_{l-1}{}' = l\,P_l(x)$.

Lösungsweg

Die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome (M.17.1.5) hat die Form

$$\Phi(x,\,h) = \left(1 - 2\,x\,h + h^2\right)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,P_{\ell}(x)$$

(für |h|<1).

Wir überprüfen die erste Beziehung der Aufgabe:

```
In[•]:= DPhidx = D[(1 - 2 x h + h^2)^(-1/2), x]
```

$$\text{Out[•]=}\quad \frac{h}{\left(1+h^2-2\,h\,x\right)^{3/2}}$$

```
In[•]:= DPhidh = Simplify[D[(1 - 2 x h + h^2)^(-1/2), h]]
```

$$\text{Out[•]=}\quad \frac{-h+x}{\left(1+h^2-2\,h\,x\right)^{3/2}}$$

Der Vergleich zeigt sofort, dass

$(x-h)\,\textbf{DPhidx} = h\,\textbf{DPhidh}$,

und damit ist der erste Teil der Aufgabe gelöst.

Im zweiten Teil wenden wir dieselbe Vorgangsweise auf die Reihendarstellung der erzeugenden Funktion an.

LinkeSeite =

$$(x-h)\,\frac{d}{dx}\sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,P_{\ell}(x) = (x-h)\sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,P_{\ell}{}'(x)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,x\,P_{\ell}{}'(x) - \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell+1}\,P_{\ell}{}'(x)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} h^{\ell}\,x\,P_{\ell}{}'(x) - \sum_{\ell=1}^{\infty} h^{\ell}\,P_{\ell-1}{}'(x)$$

Dabei haben wir (1) berücksichtigt, dass der erste Term der ersten Reihe verschwindet, und (2) eine Variablensubstitution des Index der zweiten Reihe l=k-1, k→l durchgeführt.

RechteSeite =

$$h\,\frac{d}{dh}\sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\,P_{\ell}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\,h^{\ell}\,P_{\ell}(x)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der Reihen (LinkeSeite=RechteSeite) ergibt die gesuchte Relation:

$x P_l'(x) - P_{l-1}'(x) = l P_l(x)$.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

17.7

Entwickeln Sie die Funktionen in eine Legendre Reihe:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases};$$

$$(b)\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < x < 0 \\ x & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Lösungsweg

(a)

Entsprechend (M.17.1) sind die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, P_n(x),$$

und in der Aufgabe daher

$$c_n = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx\, P_n(x) + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\, P_n(x)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\, (P_n(x) - P_n(-x))$$

Dabei haben wir beim ersten Integral x=-y und dann y→x gesetzt. Es tragen also nur die ungeraden Terme bei, was aus der Antisymmetrie der Funktion folgt:

$$c_{2k} = 0,$$
$$c_{2k+1} = \int_0^1 dx\, P_{2k+1}(x)$$

Wegen der Rekursionsbeziehung (17.26)(vgl. Aufgabe 17.6)

$$x P_\ell' - P_{\ell-1}' = \ell P_\ell \rightarrow$$
$$P_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}(x P_{2k+1}' - P_{2k}')$$

wird das Integral

$$c_{2k+1} = \int_0^1 dx\, P_{2k+1}(x)$$
$$= \frac{1}{2k+1}\int_0^1 dx\, (x P_{2k+1}' - P_{2k}')$$
$$= \frac{1}{2k+1}\left(x P_{2k+1} - P_{2k} - \int_0^1 dx\ P_{2k+1}\right)$$

und daraus

$$(1 + (2k+1))\int_0^1 dx\, P_{2k+1}(x) = (x P_{2k+1} - P_{2k})\Big|_0^1 = P_{2k}(0)$$
$$c_{2k+1} = \frac{1}{2(k+1)} P_{2k}(0)$$

Damit bleibt noch die Aufgabe, den Wert der geraden Legendre-Polynome bei x=0 zu bestimmen.

Aus der erzeugenden Funktion ergibt sich

$$\Phi\ (0,\ h)\ =\ \left(1+h^2\right)^{-1/2}\ =\ \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell}\ P_{\ell}\ (0)$$

Die Binomialreihe für $(1+h^2)^{-1/2}$ lautet

$$\left(1+h^2\right)^{-1/2}\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\ h^{2\,n}$$

woraus wir erkennen, dass

$$P_{2\,n}\ (0)\ =\ \binom{-\frac{1}{2}}{k}$$

$$c_{2\,k+1}\ =\ \frac{1}{2\ (k+1)}\ \binom{-\frac{1}{2}}{k}$$

$$=\ \frac{1}{2\ (k+1)}\ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\ \left(-\frac{1}{2}-1\right)\ ..\ \left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k\ (k-1)\ ...\ 2.1}$$

$$=\ \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\ \frac{1.3\times.5\ ..\ (2\,k-1)}{(k+1)\ !}$$

$$=\ \frac{(-1)^k}{2^{2\,k+1}}\ \frac{(2\,k)\ !}{(k+1)\ !\ k\,!.}$$

Das sind also verschiedene, aber gleichwertige Ausdrücke für die Koeffizienten der gesuchten Entwicklung.

Wir wollen noch die Konvergenz überprüfen. Die Koeffizienten haben folgende numerische Werte:

In[∘]:=
```
Koeff[n_] = If[Mod[n, 2] == 0, 0, ((-1)^((n-1)/2) (n - 1)!)/(2^n ((n + 1)/2)! ((n - 1)/2)!)];
```

In[∘]:=
```
Do[Print["c_", n, " = ", Koeff[n], " = ",
        N[Koeff[n]]    ], {n, 0, 10}]
```

c_0 = 0 = 0.

c_1 = $\frac{1}{2}$ = 0.5

c_2 = 0 = 0.

c_3 = $-\frac{1}{8}$ = -0.125

c_4 = 0 = 0.

c_5 = $\frac{1}{16}$ = 0.0625

c_6 = 0 = 0.

c_7 = $-\frac{5}{128}$ = -0.0390625

c_8 = 0 = 0.

c_9 = $\frac{7}{256}$ = 0.0273438

c_10 = 0 = 0.

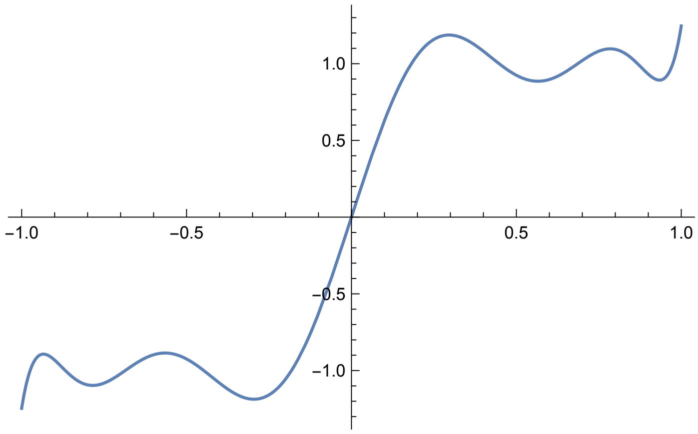
Die Funktion wird wie folgt durch die ersten fünf nicht-verschwindenden Terme der Legendrereihe genähert:

In[∘]:=
```
Reihe[nmax_, x_] = Sum[(2 n + 1) Koeff[n] LegendreP[n, x], {n, 0, nmax}]
```

Out[∘]=
$$\sum_{n=0}^{nmax} (1 + 2\,n)\ \mathrm{If}\left[\mathrm{Mod}[n, 2] == 0, 0, \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,(n-1)\,!}{2^n\ \frac{n+1}{2}\,!\ \frac{n-1}{2}\,!}\right]\ \mathrm{LegendreP}[n, x]$$

In[∘]:=
```
R10 = Reihe[10, x];
```

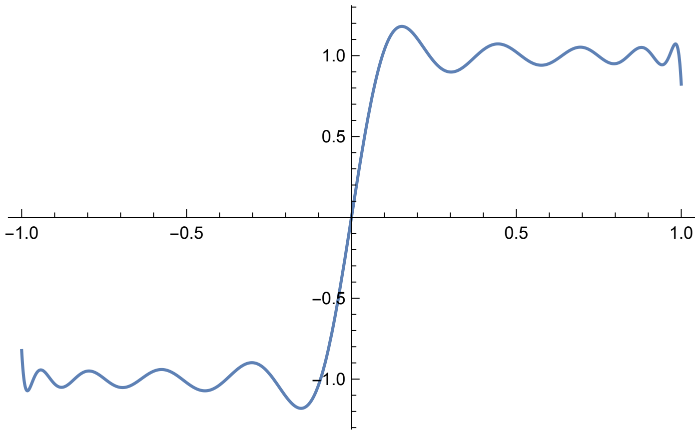
In[∘]:=
```
Plot[R10, {x, -1, 1}]
```

Out[∘]=


Die Näherung ist offenbar schlecht. Mit der Partialsumme bis n=20sieht es etwas - aber nicht sehr viel - besser aus:

In[∘]:=
```
R20 = Reihe[20, x];
```

In[∘]:=
```
Plot[R20, {x, -1, 1}]
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

(b)

Entsprechend (M.17.1) sind die Entwicklungskoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, P_n(x)\,,$$

und in der Aufgabe daher

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\ x\, P_n(x)\,.$$

Mittels der Rekursionsbeziehung (17.24) formen wir um

$$(n+1)\ P_{n+1} = (2\,n+1)\ x\,P_n - n\,P_{n-1} \rightarrow$$

$$x\,P_n = \frac{n+1}{2n+1}\,P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}\,P_{n-1} \quad .$$

Es ergibt sich daraus

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2n+1}\int_0^1 dx\,P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}\int_0^1 dx\,P_{n-1}\right).$$

In Teil (a) haben wir bereits gezeigt, dass

$$\int_0^1 dx\,P_n(x) = \frac{1}{n+1}\,P_{n-1}(0) \quad \text{für } n>0,\ 1 \text{ für } n=0.$$

Damit ist

$$c_0 = \frac{1}{4},\ c_1 = \frac{1}{6}$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2n+1}\,\frac{1}{n+2}\,P_n(0) + \frac{n}{2n+1}\,\frac{1}{n}\,P_{n-2}(0)\right)$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n+2}\,P_n(0) + P_{n-2}(0)\right)$$

Da die ungerade Legendre-Polynome im Ursprung verschwinden, tragen ab n=2 nur die geraden Koeffizienten bei! Entsprechend der Diskussion zu (a) ist für gerade n

$$P_{2k}(0) = \binom{-\frac{1}{2}}{k}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\,..\,\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k\,(k-1)\,...\,2.1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k}\,\frac{1.3\times.5\,..\,(2k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\,\frac{(2k)!}{k!\,k!}$$

und daraus ergibt sich

$$c_0 = \frac{1}{4},\ c_1 = \frac{1}{6}$$

$$c_{2k} = \frac{1}{2(4k+1)}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\,P_{2k}(0) + P_{2k-2}(0)\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2(4k+1)}\,\frac{1}{2^{2k}}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\,\frac{(2k)!}{k!\,k!} - 4\,\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\,(k-1)!}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{2(4k+1)}\,\frac{(2k-2)!}{(2k+2)\,2^{2k}\,k!\,k!}\left((2k+1)(2k)(2k-1) - 4k^2(2k+2)\right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\,(2k-2)!}{2^{2k+1}\,(k-1)!\,(k+1)!}$$

Wir wollen noch die Konvergenz überprüfen. Die Koeffizienten haben folgende numerische Werte:

```
In[•]:= Koeff[n_] = If[n == 0, 1 / 4,
          If[n == 1, 1/6, If[Mod[n, 2] == 1, 0, ((-1)^(n/2+1) (n - 2)!) / (2^(n+1) (n/2 - 1)! (n/2 + 1)!)]]];

In[•]:= Do[Print["c_", n, " = ", Koeff[n], " = ",
            N[Koeff[n]]    ], {n, 0, 10}]
```

$c\_0 = \frac{1}{4} = 0.25$

$c\_1 = \frac{1}{6} = 0.166667$

$c\_2 = \frac{1}{16} = 0.0625$

$c\_3 = 0 = 0.$

$c\_4 = -\frac{1}{96} = -0.0104167$

$c\_5 = 0 = 0.$

$c\_6 = \frac{1}{256} = 0.00390625$

$c\_7 = 0 = 0.$

$c\_8 = -\frac{1}{512} = -0.00195313$

$c\_9 = 0 = 0.$

$c\_10 = \frac{7}{6144} = 0.00113932$

Die Funktion wird wie folgt durch die ersten fünf nicht-verschwindenden Terme der Legendrereihe genähert:

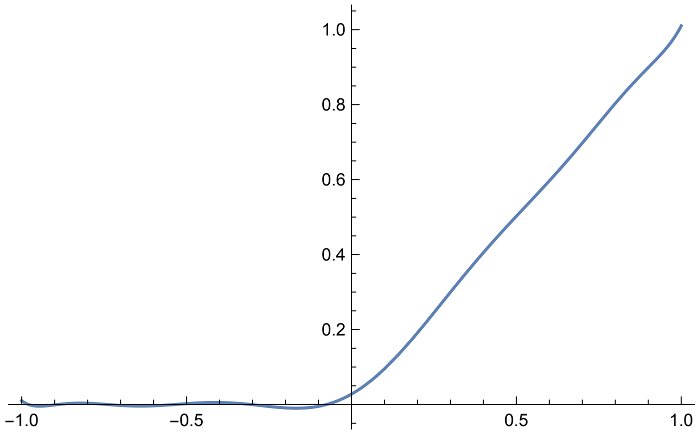
In[∘]:=
```
Reihe[nmax_, x_] = Sum[(2 n + 1) Koeff[n] LegendreP[n, x], {n, 0, nmax}]
```

Out[∘]=
$$\sum_{n=0}^{nmax} (1+2n)\, \text{If}\left[n == 0, \frac{1}{4}, \text{If}\left[n == 1, \frac{1}{6}, \text{If}\left[\text{Mod}[n, 2] == 1, 0, \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(n-2)!}{2^{n+1}\left(\frac{n}{2}-1\right)!\left(\frac{n}{2}+1\right)!}\right]\right]\right] \text{LegendreP}[n, x]$$

In[∘]:=
```
R10 = Expand[Reihe[10, x]];
```

In[∘]:=
```
Plot[R10, {x, -1, 1}, PlotRange -> All]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.8

Überprüfen Sie die Qualität der Gauß-Legendre Integrationsformel aus (C.17.1) für zumindest drei Fälle (zum Beispiel Polynom, trigonometrische Funktion, Exponentialfunktion, rationale Funktion, Funktion mit $1/\sqrt{1-x^2}$.

Lösungsweg

Die Integralformel (C.17.1.1) lautet

$$\int_{-1}^{1} dx\; f(x) = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\, w_i$$

mit den Stützstellen und Gewichten

In[•]:=
```
xpoint = {-0.96028, -0.79666, -0.52553, - 0.18343 ,
        0.18343, 0.52553, 0.79666, 0.96028 };
```

In[•]:=
```
weight = {0.10122, 0.22238 , 0.31370, 0.36268 ,
        0.36268, 0.31370, 0.22238, 0.10122 };
```

In[•]:=
```
GaussInt := N[Sum[
             func[xpoint[[i]]] × weight[[i]],
             {i, 1, 8}], 4];
```

In[•]:=
```
func[x_] = 1;
GaussInt
```

Out[•]= 1.99996

Exakter Wert:

In[•]:=
```
Integrate[func[x], {x, -1, 1}]
```

Out[•]= 2

In[•]:=
```
func[x_] = x;
GaussInt
```

Out[•]= 1.38778×10^{-17}

Exakter Wert:

In[•]:=
```
Integrate[func[x], {x, -1, 1}]
```

Out[•]= 0

In[•]:=
```
func[x_] = x^2;
GaussInt
```

Out[•]= 0.666634

Exakter Wert:

In[•]:=
```
Integrate[func[x], {x, -1, 1}]
```

Out[•]= $\frac{2}{3}$

In[•]:=
```
func[x_] = Cos[x];
GaussInt
```

Out[•]= 1.68292

Exakter Wert:

```
In[•]:= NIntegrate[func[x], {x, -1, 1}]
Out[•]= 1.68294
```

```
In[•]:= func[x_] = Exp[x];
        GaussInt
Out[•]= 2.35034
```

Exakter Wert:

```
In[•]:= NIntegrate[func[x], {x, -1, 1}]
Out[•]= 2.3504
```

```
In[•]:= func[x_] = x^2 / (2 + x);
        GaussInt
Out[•]= 0.394428
```

Exakter Wert:

```
In[•]:= NIntegrate[func[x], {x, -1, 1}]
Out[•]= 0.394449
```

```
In[•]:= func[x_] = 1 / Sqrt[1 - x^2];
        GaussInt
Out[•]= 2.93665
```

Exakter Wert:

```
In[•]:= NIntegrate[func[x], {x, -1, 1}]
Out[•]= 3.14159
```

Das letzte Beispiel lieferte also das schlechteste Ergebnis. Bei x=±1 liegt eine (integrable) Singularität, das bereitet numerischen Algorithmen immer Schwierigkeiten!

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

17.9

Zeigen Sie, dass der Ansatz (17.12) die verallgemeinerte Legendresche Differenzialgleichung auf die Differenzialgleichung (17.13) führt.

Lösungsweg

Die VLDG hat die Form (17.1)

$$\left(\left(1-x^2\right) y'(x)\right)' + \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l\,(l+1)\right) y(x) = 0 \quad \left(m^2 \le l^2\right)$$

Entsprechend (17.12) setzen wir

$$y(x) = \left(1-x^2\right)^{m/2} u(x)$$

$$\to y'(x) = -2x\frac{m}{2}\left(1-x^2\right)^{m/2-1}u(x) + \left(1-x^2\right)^{m/2}u'(x) = -m\,x\left(1-x^2\right)^{m/2-1}u(x) + \left(1-x^2\right)^{m/2}u'(x)$$

in die VLDG ein:

$$\left(-m\,x\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x) + \left(1-x^2\right)^{m/2+1}u'(x)\right)' + \left(-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1)\right)\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x) = 0$$

$$-m\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x) + m^2x^2\left(1-x^2\right)^{m/2-1}u(x) - m\,x\left(1-x^2\right)^{m/2}u'(x) - (m+2)\,x\left(1-x^2\right)^{m/2}u'(x) + \left(1-x^2\right)^{m/2+1}u''(x) - m^2\left(1-x^2\right)^{m/2-1}u(x) + l(l+1)\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x) = 0$$

$$(l(l+1) - m(m+1))\left(1-x^2\right)^{m/2}u(x) - 2(m+1)\,x\left(1-x^2\right)^{m/2}u'(x) + \left(1-x^2\right)^{m/2+1}u''(x) = 0$$

Daraus folgt die gesuchte Form (17.13)

$$[l(l+1) - m(m+1)]\,u(x) - 2(m+1)\,x\,u'(x) + u''(x) = 0 \quad \left(\text{für } \left(1-x^2\right)^{m/2} \neq 0\right).$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.10

Bestimmen Sie die Legendre-Reihe für das Potenzial eines Paares von zwei entgegengesetzten Punktladungen (-q und q, bei x= -a und a) und diskutieren Sie den führenden Term. Was ist das Dipolmoment?

Lösungsweg

Die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome (M.17.1.5) hat die Form

$$\Phi(x, h) = \left(1 - 2\,x\,h + h^2\right)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(x)$$

Die beiden Ladungen q und -q befinden sich zum Beispiel auf den x-Achse bei (a,0,0) und (-a,0,0). Ein Punkt im Abstand **r**=(x,y,z), an dem man das Potenzial bestimmen will, hat zur Ladung q den Abstandsvektor $\boldsymbol{r_1}$=(x-a,y,z) und zur Ladung -q den Abstandsvektor $\boldsymbol{r_2}$=(x+a,y,z).

Wir legen die Ebene der Ladungen und des Punktes in die x-y Ebene (z=0) und rechnen in Polarkoordinaten. Dann ist in Polarkoordinaten (Skizze!)

$$|r_1| = |(r\cos\varphi - a, r\sin\varphi, 0)| = r\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\varphi + \left(\frac{a}{r}\right)^2}$$

$$= r\Big/\Phi\left(\cos\varphi, \frac{a}{r}\right)$$

$$|r_2| = |(r\cos\varphi + a, r\sin\varphi, 0)| = r\sqrt{1 + 2\frac{a}{r}\cos\varphi + \left(\frac{a}{r}\right)^2}$$

$$= r\Big/\Phi\left(-\cos\varphi, \frac{a}{r}\right)$$

Das Potenzial im betrachteten Punkt (mit Abstand r und Winkel φ) ist dann

$$V(r, \varphi) = \frac{q}{|r_1|} - \frac{q}{|r_2|}$$

$$= \frac{q}{r}\left[\Phi\left(\cos\varphi, \frac{a}{r}\right) - \Phi\left(-\cos\varphi, \frac{a}{r}\right)\right]$$

$$= \frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n [P_n(\cos\varphi) - P_n(-\cos\varphi)]$$

$$= \frac{2q}{r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos\varphi)$$

$$= \frac{2aq}{r^2}\cos\varphi + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

Der führende Term heißt Dipolmoment. Er fällt quadratisch ab, die Stärke hängt von der Richtung des betrachteten Punktes zur x-Achse ab, verschwindet also etwa in der x-y-Ebene. Mit der gebräuch lichen Abkürzung $\vec{\mu}$=2 $\vec{a}$ q (Abstandsvektor zwischen den Ladungen= 2$\vec{a}$) wird das Dipolmoment in die übliche Form

$$\frac{\vec{\mu}.\vec{\mathbf{r}}}{|r|^3}$$

gebracht.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.11

Zeigen Sie, dass

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{und}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

ist. Man beachte dabei, dass $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Lösungsweg

Entsprechend (17.44) lautet die Reihendarstellung dieser Besselfunktion

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\left(n+\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \left(n+\frac{1}{2}\right)!\, 2^{2n+1}} x^{2n+1}$$

Wir formen den Nenner des Koeffizienten um:

$$n!\, \left(n+\frac{1}{2}\right)!\, 2^{2n+1}$$

$$= n!\, \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(n-\frac{1}{2}\right) \ldots \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{2n+1}$$

$$= \sqrt{\pi}\; [n\,(n-1) \ldots 2.1]$$

$$[(2n+1).(2n-1) \ldots 3.1]\; 2^n$$

$$= \sqrt{\pi}\; [2n\,(2n-2) \ldots \times 4.2]$$

$$[(2n+1).(2n-1) \ldots 3.1]$$

$$= \sqrt{\pi}\; (2n+1)!$$

Damit ist

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Die Ableitung für p=-1/2 verläuft analog.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.12

Beweisen Sie die Differenziationsformel (M.17.3.2) für Besselfunktionen aus der Reihendarstellung.

Lösungsweg

Entsprechend (17.44) lautet die Reihendarstellung dieser Besselfunktion

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Wir berechnen daraus die folgende Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, (n+p)!\, 2^{2n+p}} x^{2n+2p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, (n+p)!\, 2^{2n+p}}\, 2\,(n+p)\, x^{2n+2p-1}$$

$$= x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, (n+(p-1))!\, 2^{2n+(p-1)}} x^{2n+(p-1)}$$

$$= x^p J_{p-1}(x)$$

Damit haben wir die gesuchte Relation bewiesen:

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x)$$

In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.13

Finden Sie Ausdrücke für die Besselfunktionen $J_{\frac{3}{2}}$ und $J_{-\frac{3}{2}}$.

Lösungsweg

Der Rechengang verläuft entweder analog zu Aufgabe 17.11 oder, schneller, mit Hilfe der Ableitungsformel (M.17.3.2) oder der Rekursionsbeziehung (M.17.3.3).

(a) Ableitungsrelation(M.17.3.2)

$$\frac{d}{dx}\left(x^p J_p(x)\right) = x^p J_{p-1}(x)$$

Daher gilt

$$\frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x)) = x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(x)$$

Wir kennen $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ aus (M .15 × .3 × .6) (oder Aufgabe 17.11) und finden daher

$$\frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x)) = \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx}(\frac{\cos x}{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2})$$

$$\rightarrow J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{x\pi}} (\sin x + \frac{1}{x} \cos x)$$

Die Ableitung für p=3/2 verläuft analog.

(b) Rekursionsformel (M.17.3.3)

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

Daher ist (p=-1/2)

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) + J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{-1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -J_{\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin x + \frac{1}{x} \cos x\right)$$

Für p=1/2 ergibt sich

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x\right)$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.14

Die Hermite-Polynome H_n(x) sind die Lösungen von (17.58). Zeigen Sie anhand dieser Differenzialgleichung, dass die Funktionen {exp(-x^2/2) H_n(x)} orthogonal in ℝ sind.

Lösungsweg

Die Hermitesche DG in der Form (17.58) lautet

$$y''(x) - 2 x y'(x) + 2 n y(x) = 0 .$$

Die Hermite-Polynome sind Lösungen dieser Gleichung. Wir schreiben sie für zwei solche Polynome hin:

$$H_k'' - 2 x H_k' + 2 k H_k = 0$$
$$H_n'' - 2 x H_n' + 2 n H_n = 0 .$$

Wir multiplizieren mit H_n und H_k und subtrahieren die Gleichungen dann :

$$H_n H_k'' - H_k H_n'' - 2 x (H_n H_k' - H_k H_n') + 2 (k - n) H_n H_k = 0 \quad \rightarrow$$

$$(H_n H_k' - H_k H_n')' - 2 x (H_n H_k' - H_k H_n') = 2 (n - k) H_n H_k$$

Wir multiplizieren mit exp (-x^2) und sehen, dass wir wie folgt umformen können :

$$e^{-x^2} (H_n H_k' - H_k H_n')' - 2 x e^{-x^2} (H_n H_k' - H_k H_n') = 2 (n - k) e^{-x^2} H_n H_k \rightarrow$$
$$\left(e^{-x^2} H_n H_k' - e^{-x^2} H_k H_n'\right)' = 2 (n - k) e^{-x^2} H_n H_k$$

Nun integrieren wir beide Seiten über ganz ℝ und erhalten

$$\left(e^{-x^2} H_n H_k' - e^{-x^2} H_k H_n'\right)_{-\infty}^{\infty} = 2 (n - k) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n H_k$$

Da die H Polynome sind, verschwindet (aufgrund des Exponentialfaktors)die linke Seite für n≠k und daher gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n H_k = 0 \text{ für } n \neq k .$$

Dieses Verfahren ist typisch für das Sturm-Liouville-Problem und wird in Abschnitt (14.4.3) diskutiert.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

17.15

Finden Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion für die Hermite-Polynome mindestens zwei Rekursionsformeln für H und / oder H'.

Lösungsweg

Die erzeugende Funktion für die Hermite-Polynome hat die Form

$$\Phi(x, h) = \exp\left(-h^2 + 2hx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n(x) .$$

Die Vorgangsweise ist immer ähnlich: Man leitet Φ in beiden Formen einem der Parameter ab und vergleicht die Ergebnisse.

(a) Ableitung nach h

$$\frac{\partial}{\partial h}\exp\left(-h^2 + 2hx\right) = \frac{\partial}{\partial h}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n(x)$$

$$(2x - 2h)\exp\left(-h^2 + 2hx\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} H_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}(2x - 2h) H_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} H_{k+1}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} 2x H_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k-1)!} 2 H_{k-1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} H_{k+1}(x)$$

Der Vergleich der Koeffizienten zu Potenzen von h ergibt

$2x H_k(x) - 2k H_{k-1}(x) = H_{k+1}(x)$ für $k > 0$.

(b) Ableitung nach x

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-h^2 + 2hx\right) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n(x)$$

$$2h\exp\left(-h^2 + 2hx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n'(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{n!} 2 H_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} H_n'(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k-1)!} 2 H_{k-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} H_k'(x)$$

Der Vergleich der Koeffizienten zu Potenzen von h ergibt

$2k H_{k-1}(x) = H_k'(x)$ für $k > 0$.

Man kann diese Beziehung noch in die obige einsetzen und erhält dann (17.61).

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```