Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 18. Partielle Differenzialgleichungen

18.1

Finden Sie die Lösungen der Gleichung

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} R(r)\right) = n^2 R(r) .$$

Lösungsweg

Diese Gleichung ist vom Typ (6.121),

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} R(r)\right) = n^2 R(r)$$

$$\to \quad r^2 \; R'' + r \; R'(r) - n^2 R = 0$$

$$R'' + \frac{1}{r} \; R'(r) - \frac{n^2}{r^2} R = 0 ,$$

mit einer "regulären" Singularität (6.123) bei r=0, haben also nach dem Theorem von Fuchs (Frobeniusmethode) eine Potenzreihenentwicklung. Allerdings ist die DG homogen, da offenbar r→ t r sie unverändert lässt. Wie in Abschnitt 6.3 besprochen, ist dann der Ansatz besonders einfach, nämlich

$$R(r) = c\, r^s .$$

Wir setzen diesen in die DG ein und erhalten

$$r \frac{d}{dr}(c\, s\, r^s) = c\, n^2\, r^s \rightarrow$$

$$s^2\, r^s = n^2\, r^s \rightarrow s = \pm n$$

Die allgemeine Lösung ist daher eine Linearkombination der beiden Lösungen:

$R(r) = a\, r^n + b\, r^{-n}$.

Eine andere Methode, zu diesen Lösungen zu kommen wäre die Substitution

$$u = \ln r, \quad r \frac{d}{dr} = \frac{d}{d \ln r} = \frac{d}{du}$$

gewesen. Damit wird die DG

$$\frac{d^2}{du^2} R(u) = n^2\, R(u) \rightarrow R(u) = c \exp(\pm n\, u)$$

$$\rightarrow R(r) = c\, r^{\pm n},$$

also wie weiter oben.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

18.2

Die Greensche Funktion erfülle die Differenzialgleichung

$G''(x,z)+G(x,z)=\delta(x-z)$

mit den Neumann-Randbedingungen $G'(0,z)=G'(\pi/2,z)=0$.

(a) Man entwickle $G(x,z)$ nach einem passenden Eigenfunktionensystem.

(b) Man bestimme eine geschlossene Lösung und entwickle diese zur Kontrolle nach (a).

Lösungsweg

Im Buch ist dieses Problem für Dirichlet-Randbedingungen behandelt worden.

Wir nehmen an, die Ableitung der Greenschen Funktion gelte auch für Neumann-Randbedingungen (siehe (18.27)).

(a)

Die homogene Gleichung

$$G''(x, z) + G(x, z) = 0$$

ist eine Schwingungsgleichung und das Eigensystem mit Neumann-Randbedingungen ist $\{\cos(2\, n\, \pi)\}$

Wir entwickeln die Greensche Funktion in diesem System

$$G(x, z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos(2\, n\, x)$$

und auch die Delta-Funktion in dieses System

$$\delta(x - z) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z) \cos(2\, n\, x)$$

$$b_0\,(z) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\delta\,(x-z)\,dx = \frac{4}{\pi}$$

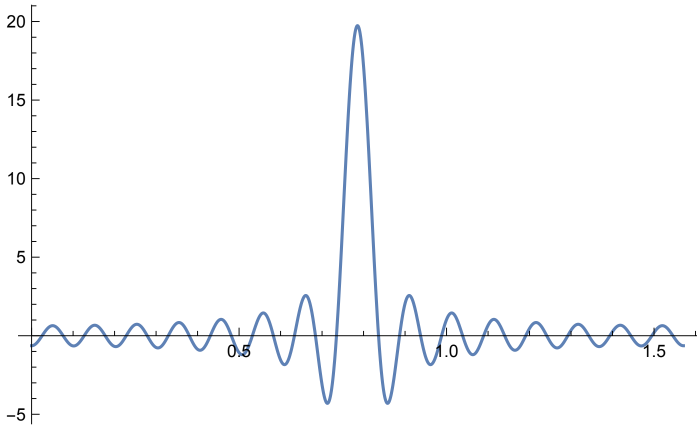
$$b_n\,(z) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\delta\,(x-z)\cos\,(2\,n\,x)\,dx = \frac{4}{\pi}\cos\,(2\,n\,z)\quad (n>0)$$

$$\to \delta\,(x-z) = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\,(2\,n\,z)\cos\,(2\,n\,x)$$

Das entspricht auch einer Vollständigkeitsrelation. Zur Kontrolle wollen wir uns das numerisch skizzieren. Dazu wählen wir $z=\pi/4$ und ein maximales n von 30:

In[∘]:=
```
Plot[2/π + 4/π Sum[Cos[2 n π / 4] Cos[2 n x], {n, 1, 30}], {x, 0, π/2}, PlotRange → All]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
NIntegrate[2/π + 4/π Sum[Cos[2 n π / 4] Cos[2 n x], {n, 1, 30}], {x, 0, π/2}]
```

Out[∘]= 1.

Wenn wir nun die Entwicklung für die Greensche Funktion in die DG einsetzen , können wir einen Koeffizientenvergleich mit dem Quellterm in Reihendarstellung durchführen

$$-\sum_{n=1}^{\infty}4\,n^2\,a_n\,(z)\cos\,(2\,n\,x)+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z)\cos\,(2\,n\,x) =$$

$$\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\,(2\,n\,z)\cos\,(2\,n\,x)$$

$$\longrightarrow a_0 = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n\left(1-4\,n^2\right) = \frac{4}{\pi}\cos\,(2\,n\,z)\longrightarrow a_n = -\frac{4}{\pi\,(4\,n^2-1)}\cos\,(2\,n\,z)$$

und daher ist

$$G\,(x,\,z) = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\,n^2-1}\cos\,(2\,n\,z)\cos\,(2\,n\,x)$$

Diese Funktion kann man dazu verwenden, die DG

$$y'' + y = f\,(x)$$

für Neumann-Randbedingungen zu lösen. Betrachten wir zum Beispiel

$$f\,(x) = \cos\,(2\,x)$$

welche die Randbedingungen erfüllt.

Dann ist

$$y(z) = \int_0^{\pi/2} G(x, z)\, f(x)\, dx$$

Zur Vorbereitung berechnen wir

$$d_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Cos}[2\,n\,x]\, \mathrm{Cos}[2\,x]\, dx = \frac{\pi}{4}\,\delta_{n1}$$

Es ergibt sich daher

$$y[z] = -\frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{4-1}\,\mathrm{Cos}[2\,z] = -\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}[2\,z]$$

Wir setzen zur Kontrolle in die DG ein:

In[•]:= $y[z\_] = -\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}[2\,z]$

Out[•]= $-\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}[2\,z]$

(b)

Die homogene Gleichung

G''(x,z)+G(x,z)=0

ist eine Schwingungsgleichung mit den Fundamentalsystem

$y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \cos(x)$.

Die Wronski-Determinante ist -1.

Wir bestimmen G daraus:

$G(x, z) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) - \sin(x)\cos(z)$ für $0 < x < z$

$G(x, z) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) - \sin(z)\cos(x)$ für $z < x < \pi/2$

Die Neumann-Randbedingungen sind

$G'(0, z) = \alpha \cos(0) - \beta \sin(0) - \cos(0)\cos(z) = 0$

$\longrightarrow \alpha = \cos(z)$

$G'(\pi/2, z) = \alpha \cos(\pi/2) - \beta \sin(\pi/2) + \sin(z)\sin(\pi/2) = 0$

$\longrightarrow \beta = \sin(z)$

$G(x, z) = \sin(z)\cos(x)$ für $0 < x < z$

$G(x, z) = \cos(z)\sin(x)$ für $z < x < \pi/2$

Zur Kontrolle vergleichen wir mit dem früher unter (a) gewählten Quellterm Cos[2 x] und berechnen wieder y[x]:

In[•]:=
```
Integrate[Sin[z] Cos[x] Cos[2 x], {x, 0, z}] +
  Integrate[Cos[z] Sin[x] Cos[2 x], {x, z, Pi / 2}]
```

Out[•]= $\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}[z]^2\,(-2 + \mathrm{Cos}[2\,z]) + \frac{1}{3}\,(2 + \mathrm{Cos}[2\,z])\,\mathrm{Sin}[z]^2$

In[•]:=
```
Simplify[%]
```
Out[•]= $-\frac{1}{3}\text{Cos}[2\,z]$

Wir stimmen also überein.

Nun müssen wir noch (laut Aufgabe) unsere Greensche Funktion in das Funktionensystem {c0s(2 n x)} entwickeln.

$$G(x, z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos(2\,n\,x)$$

In[•]:=
```
a0 =
 4/π (Integrate[Sin[z] Cos[x] , {x, 0, z}] + Integrate[Cos[z] Sin[x] , {x, z, π/2}])
```

Out[•]= $\frac{4\left(\text{Cos}[z]^2+\text{Sin}[z]^2\right)}{\pi}$

In[•]:=
```
Simplify[%]
```
Out[•]= $\frac{4}{\pi}$

In[•]:=
```
an = 4/π (Integrate[Sin[z] Cos[x] Cos[2 n x] , {x, 0, z}] +
    Integrate[Cos[z] Sin[x] Cos[2 n x]  , {x, z, π/2}])
```

Out[•]= $\frac{4\left(\frac{\text{Sin}[z]\,(\text{Cos}[2\,n\,z]\,\text{Sin}[z]-2\,n\,\text{Cos}[z]\,\text{Sin}[2\,n\,z])}{1-4\,n^2}+\frac{\text{Cos}[z]\,(-\text{Cos}[z]\,\text{Cos}[2\,n\,z]+2\,n\,(\text{Sin}[n\,\pi]-\text{Sin}[z]\,\text{Sin}[2\,n\,z]))}{-1+4\,n^2}\right)}{\pi}$

In[•]:=
```
an = Simplify[Simplify[an] /. Sin[n π] → 0]
```
Out[•]= $-\frac{4\,\text{Cos}[2\,n\,z]}{\left(-1+4\,n^2\right)\pi}$

Wir finden

$$G(x, z) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\,n^2-1} \cos(2\,n\,z) \cos(2\,n\,x)$$

Das stimmt mit dem Ergebnis (a) überein!

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.3

Finden Sie die Lösung von

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad \Psi(0, t) = \Psi(1, t) = 0, \quad \Psi(x, 0) = \sin(\pi\,x)$$

(a) durch einen Separationsansatz und
(b) durch Laplace-Transformation (bezüglich t) und Bestimmung der Greenschen Funktion für die transformierte Differenzialgleichung.

Lösungsweg

(a)

Wir wählen den Separationsansatz

$$\Psi(x, t) = A(x)\, B(t)$$

und setzen in die Gleichung ein. Es ergibt sich nach Division durch A(x) B(t)

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{1}{B(t)} \frac{dB(t)}{dt}$$

Linke und rechte Seite sind Funktionen unterschiedlicher Variablen. Die einzige Möglichkeit ist daher

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -c^2$$

$$\frac{1}{B(t)} \frac{dB(t)}{dt} = -c^2$$

wobei wir die Konstante (vorausblickend) geeignet gewählt haben.

Die erste Gleichung hat die Lösung

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -c^2 A(x) \longrightarrow A(x) = \alpha \,\mathrm{Sin}(c\, x) + \beta \,\mathrm{Cos}(c\, x)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -c^2 B(t) \longrightarrow B(t) = \gamma \exp\left(-c^2 t\right)$$

Die allgemeine Lösung setzt sich daher zusammen aus Termen der Form

$$\Psi(x, t) = (\alpha \,\mathrm{Sin}(c\, x) + \beta \,\mathrm{Cos}(c\, x)) \exp\left(-c^2 t\right)$$

Da für alle t gilt, dass $\Psi(0,t)=\Psi(\pi,t)=0$, finden wir

$$\Psi(0, t) = \beta \exp\left(-c^2 t\right) = 0 \longrightarrow \beta = 0$$

$$\Psi(\pi, t) = \alpha \,\mathrm{Sin}(c\, \pi) \exp\left(-c^2 t\right) = 0 \longrightarrow c = n\, \pi$$

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{Sin}(n\, \pi\, x) \exp\left(-n^2 \pi^2 t\right)$$

Die Anfangsbedingung legt die unbekannten Koeffizienten fest:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{Sin}(n\, \pi\, x) = \mathrm{Sin}(\pi\, x) \longrightarrow a_n = \delta_{n1}$$

und daher die Lösung

$$\Psi(x, t) = \mathrm{Sin}(\pi\, x) \exp\left(-\pi^2 t\right)$$

Zur Kontrolle setzen wir in die Ausgangsgleichung ein um zu überprüfen, dass sie erfüllt wird:

```
In[]:= D[-ⅇ^(-π^2 t) Sin[π z], {z, 2}] - D[-ⅇ^(-π^2 t) Sin[π z], t]
Out[]= 0
```

(b)

Laplace-Transformation ergibt

$$\frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x^2} = -\Phi(x, 0) + u\, F(x, u)$$

$$\frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x^2} = -\sin(\pi x) + u F(x, u)$$

Dabei ist u einfach wie ein Parameter zu behandeln. Wir haben also die inhomogene DG

$$\frac{\partial^2 F(x, u)}{\partial x^2} - u F(x, u) = -\sin(\pi x)$$

mit den Randbedingungen

$$F(0, u) = F(1, u) = 0.$$

Wir lösen nach der Vorschrift von Abschnitt 18.3.3 zuerst die homogene DG. Diese hat (für reelle u) das Fundamentalsystem

$$\left\{\exp\left(-\sqrt{u}\, x\right), \exp\left(\sqrt{u}\, x\right)\right\}$$

oder, äquivalent,

$$\left\{\sinh\left(\sqrt{u}\, x\right), \cosh\left(\sqrt{u}\, x\right)\right\}$$

Da wir Lösungen suchen, die bei 0 und 1 verschwinden, ist es günstig, als zweite Lösung eine geeignete Linearkombination zu wählen. Wegen der Additionstheoreme gibt es immer eine Kombination von Sinh(x) und Cosh(x), die die Form Sinh(x+c) für beliebig gewähltes c hat. Wir wählen daher die Basisfunktionen:

$$\left\{\sinh\left(\sqrt{u}\, x\right), \sinh\left(\sqrt{u}\,(1-x)\right)\right\}$$

(Wenn man statt dessen andere Basisfunktionen wählt, ändert sich zwar die Greensche Funktion, spätestens bei der Integration ergibt sich aber wieder das gleiche Ergebnis).

Daraus bestimmen wir die Wronski-Determinante

In[∘]:= $W = \mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, x\right] & \mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right] \\ \sqrt{u}\,\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{u}\, x\right] & -\sqrt{u}\,\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right] \end{pmatrix}\right]$

Out[∘]= $-\sqrt{u}\,\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{u}\, x\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right] - \sqrt{u}\,\mathrm{Cosh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, x\right]$

In[∘]:= `Simplify[%]`

Out[∘]= $-\sqrt{u}\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\right]$

und weiter daraus die Greensche Funktion:

$0 < x < z:$

$$G(x, z) = \alpha\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, x\right] + \beta\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right] - \frac{\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, x\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-z)\right]}{\sqrt{u}\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\right]}$$

$z < x < \pi:$

$$G(x, z) = \alpha\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, x\right] + \beta\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right] - \frac{\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\, z\right]\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\,(1-x)\right]}{\sqrt{u}\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\right]}$$

Die Randbedingungen für die Greensche Funktion ergeben die Werte für die Integrationskonstanten

$$G(0, z) = \beta\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\right] = 0$$

$$G(1, z) = \alpha\,\mathrm{Sinh}\left[\sqrt{u}\right] = 0$$

$$\longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$G_1(x, z) = -\frac{\text{Sinh}[\sqrt{u}\, x]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(1-z)]}{\sqrt{u}\, \text{Sinh}[\sqrt{u}]}$$

$$G_2(x, z) = -\frac{\text{Sinh}[\sqrt{u}\, z]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(1-x)]}{\sqrt{u}\, \text{Sinh}[\sqrt{u}]}$$

Daher ist die Lösung für F(z):

In[•]:= $$A = \text{Integrate}\left[-\frac{\text{Sinh}[\sqrt{u}\, x]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(1-z)]\,(-\text{Sin}[x\,\pi])}{\sqrt{u}\, \text{Sinh}[\sqrt{u}]}, \{x, 0, z\}\right]$$

Out[•]= $$\frac{\text{Csch}[\sqrt{u}]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(1-z)]\,\left(\sqrt{u}\, \text{Cosh}[\sqrt{u}\, z]\, \text{Sin}[\pi z] - \pi\, \text{Cos}[\pi z]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\, z]\right)}{\sqrt{u}\,(\pi^2 + u)}$$

In[•]:= $$B = \text{Integrate}\left[-\frac{\text{Sinh}[\sqrt{u}\, z]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(1-x)]\,(-\,\text{Sin}[x\,\pi])}{\sqrt{u}\, \text{Sinh}[\sqrt{u}]}, \{x, z, 1\}\right]$$

Out[•]= $$\frac{\text{Csch}[\sqrt{u}]\,\left(\sqrt{u}\, \text{Cosh}[\sqrt{u}\,(-1+z)]\, \text{Sin}[\pi z] - \pi\, \text{Cos}[\pi z]\, \text{Sinh}[\sqrt{u}\,(-1+z)]\right) \text{Sinh}[\sqrt{u}\, z]}{\sqrt{u}\,(\pi^2 + u)}$$

In[•]:= **F[z_] = Expand[Simplify[A + B]]**

Out[•]= $$\frac{\text{Sin}[\pi z]}{\pi^2 + u}$$

Inverse Laplace-Transformation gibt die Lösung

In[•]:= $$\text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{\text{Sin}[\pi z]}{\pi^2 + u}, u, t\right]$$

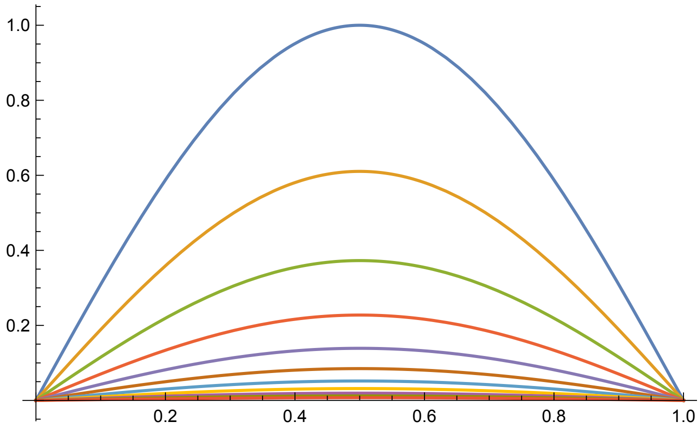
Out[•]= $e^{-\pi^2 t}\, \text{Sin}[\pi z]$

In[•]:= $\text{PlotFunctions} = \text{Table}\left[e^{-\pi^2 t}\, \text{Sin}[\pi x], \{t, 0, 0.5, 0.05\}\right]$

Out[•]= {1. Sin[π x], 0.610498 Sin[π x], 0.372708 Sin[π x], 0.227537 Sin[π x], 0.138911 Sin[π x], 0.084805 Sin[π x], 0.0517733 Sin[π x], 0.0316075 Sin[π x], 0.0192963 Sin[π x], 0.0117804 Sin[π x], 0.00719188 Sin[π x]}

In[•]:=
```
Plot[{Sin[π x], 0.6104980252657972` Sin[π x],
  0.37270783885343794` Sin[π x], 0.22753739962110678` Sin[π x],
  0.13891113314280026` Sin[π x], 0.0848049724711138` Sin[π x],
  0.05177326822633524` Sin[π x], 0.031607478013734105` Sin[π x],
  0.01929630291101678` Sin[π x], 0.011780354822106398` Sin[π x],
  0.007191883355826368` Sin[π x]}, {x, 0, 1}, PlotRange → All]
```

Out[•]=



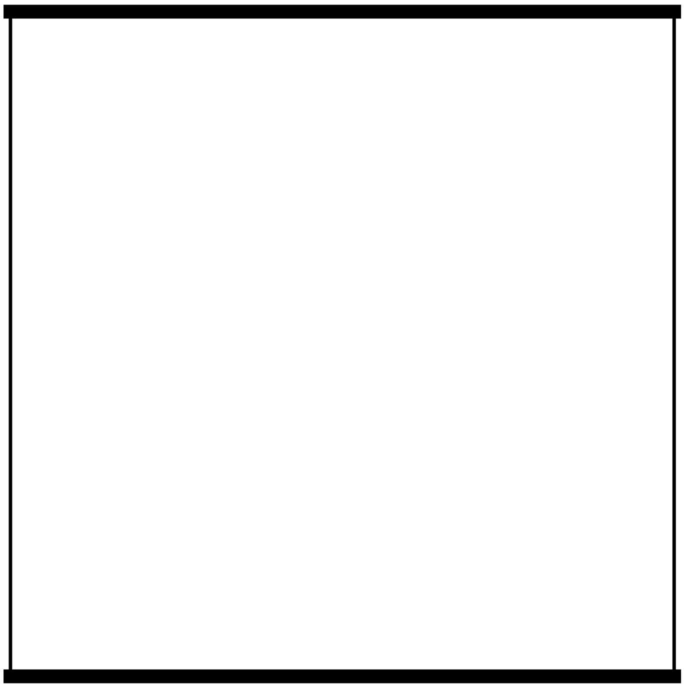
In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.4

Wie ist die Gleichgewichtstemperaturverteilung einer quadratischen Platte mit Kantenlänge 1, wenn der obere und der untere Rand eine Temperatur von 50 Grad, der linke und rechte Rand eine Temperatur von 10 Grad haben?

Lösungsweg

In[•]:=
```
Show[Graphics[{Thickness[0.02], Line[{{0, 0}, {1, 0}}], Line[{{0, 1}, {1, 1}}]}],
 Graphics[{Thickness[0.005], Line[{{0, 0}, {0, 1}}], Line[{{1, 0}, {1, 1}}]}],
 AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=


Die dicken Linien entsprechen der Rand-Temperatur von 50 Grad, die dünnen einer von 10 Grad.

Die Aufgabe ist vom elliptischen Typ und wird - wie in 16.3.3 besprochen - mittels Separation der Variablen gelöst. Dort wird der Fall besprochen, dass nur der untere Rand eine Temperatur von 100 Grad hat, die anderen drei Ränder eine von 0 Grad. Die Lösung im Inneren der Platte ist durch (16.35) gegeben. Für a=b=1 und Temperatur T am unteren Rand lautet sie

$$f(T, x, y) = \frac{4T}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sinh[(2m+1)(1-y)\pi]}{(2m+1)\sinh[(2m+1)\pi]} \sin[(2m+1)\pi x]$$

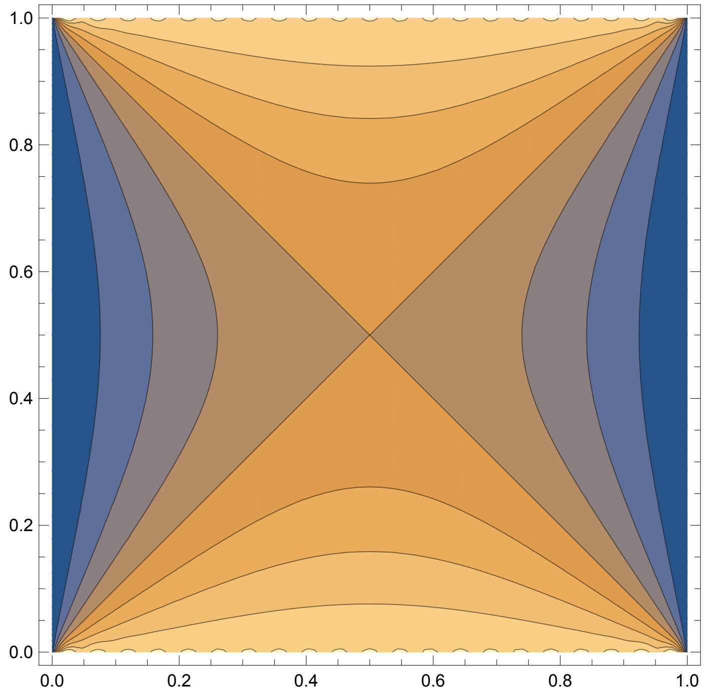
Wie auf S. 473 besprochen,kann man die Lösung u(x,y) der vorliegenden Aufgabe durch Superposition dieser Lösung f(x,y) gewinnen. Sie lautet offenbar

$$u(x, y) = 10 + f(40, x, y) + f(40, x, 1-y).$$

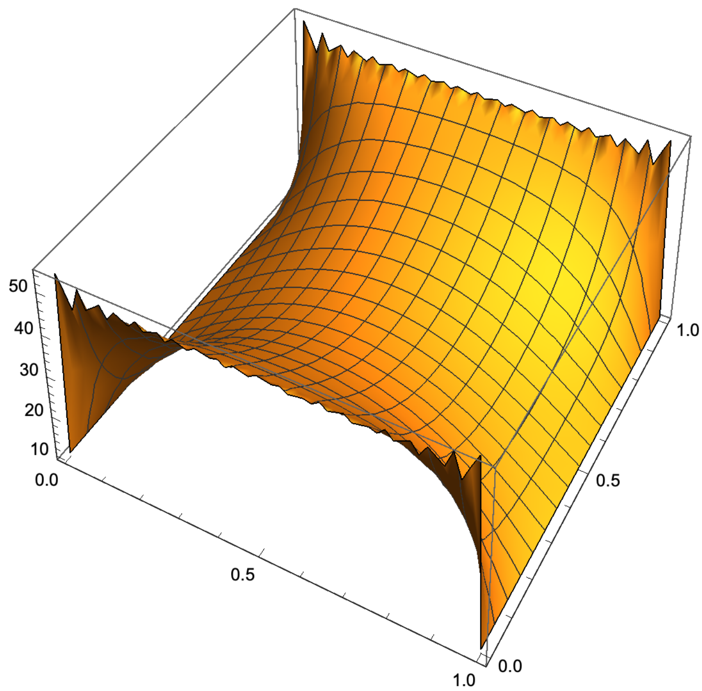
Wir wollen uns eine Vorstellung von der Temperaturverteilung verschaffen:

In[•]:=
$$u[x\_, y\_] = 10 + (160/\pi) \sum_{m=0}^{20} (\mathrm{Sinh}[(2m+1)(1-y)\pi] + \mathrm{Sinh}[(2m+1)\,y\,\pi]) / ((2m+1)\,\mathrm{Sinh}[(2m+1)\pi])\,\mathrm{Sin}[(2m+1)\pi x];$$

In[•]:=
```
ContourPlot[u[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
Plot3D[u[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=


Da wir dabei die Partialsumme nur bis m=20 berücksichtigt haben (damit wir das Ergebnis in angemessener Zeit sehen!), finden wir am Rand nicht genau die geforderten 50 Grad, sondern nur näherungsweise.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.5

Wie ist die Gleichgewichtstemperaturverteilung eines unendlich langen Stabes mit quadratischem

Querschnitt ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z$), dessen Temperatur am Rand den Wert 0 und am Boden (z=0) den Wert 25 hat?

Lösungsweg

Solche Aufgaben sind vom elliptischen Typ und können durch Separationsansatz gelöst werden:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y, z) = 0,$$

$$u(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \to$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

Jeder der drei Terme muss von den anderen unabhängig (Separation der Variablen!) und daher konstant sein. Es gibt also zwei unabhängige Konstanten.

Wir nennen sie $-\alpha^2$ und $-\beta^2$ und finden die Lösungen

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2$$

$$\to X(x) = \{\sin(\alpha x), \cos(\alpha x)\},$$

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2$$

$$\to Y(y) = \{\sin(\beta y), \cos(\beta y)\},$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\to Z(z) = \exp\left(\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\; z\right).$$

Die Randbedingungen legen die möglichen Werte fest:

$$u(x = 0, y, z) = 0 \to X(x) \sim \sin(\alpha x)$$

$$u(x = a, y, z) = 0 \to a\,\alpha = n\,\pi \to \alpha = \frac{n\,\pi}{a}$$

$$u(x, y = 0, z) = 0 \to Y(Y) \sim \sin(\beta y)$$

$$u(x, y = a, z) = 0 \to a\,\beta = k\,\pi \to \beta = \frac{k\,\pi}{a}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+k^2},$$

$$u(x, y, z \to \infty) = \text{endlich}$$

$$\to Z(z) = \exp\left(-\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+k^2}\; z\right).$$

Damit ist die allgemeine Lösung folgende Superposition

$$u(x, y, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} c_{nk} \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\,\pi\,y}{a}\right) \times \exp\left(-\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+k^2}\; z\right)$$

Nun müssen wir noch die Randbedingung u(x,y,0)=25 "einbauen".

$$u\,(x,\,y,\,0) = 25 = \sum_{n,k=0}^{\infty} c_{nk} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right)$$

Da das Ergebnis in x, y symmetrisch ist, können wir es durch das Produkt g(x)g(y) mit

$$g\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 5$$

ausdrücken. Dies ist eine Fourier-Sinus-Reihe (vgl. (12.32), L=a) mit den Koeffizienten

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a dx\, 5 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$= -\frac{10}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\Big|_0^a = \frac{10}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \frac{20}{n\pi} \text{ für ungerade } n, \text{ sonst } 0.$$

Damit ist die Lösung

$$u\,(x,\,y,\,z) = \frac{400}{\pi^2} \sum_{\substack{\text{ungerade}\\ n,k=0}}^{\infty} \frac{1}{n\,k} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{a}\right)$$

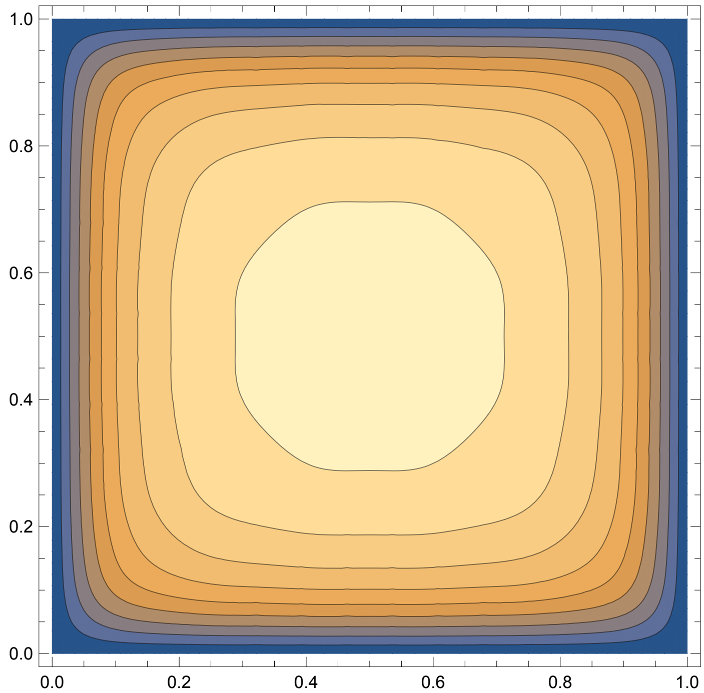
$$\times \quad \exp\left(-\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+k^2}\; z\right)$$

Wir wollen uns das Temperatur-Profil bei z=0.1, 0.5 und 1(a=1) ansehen:

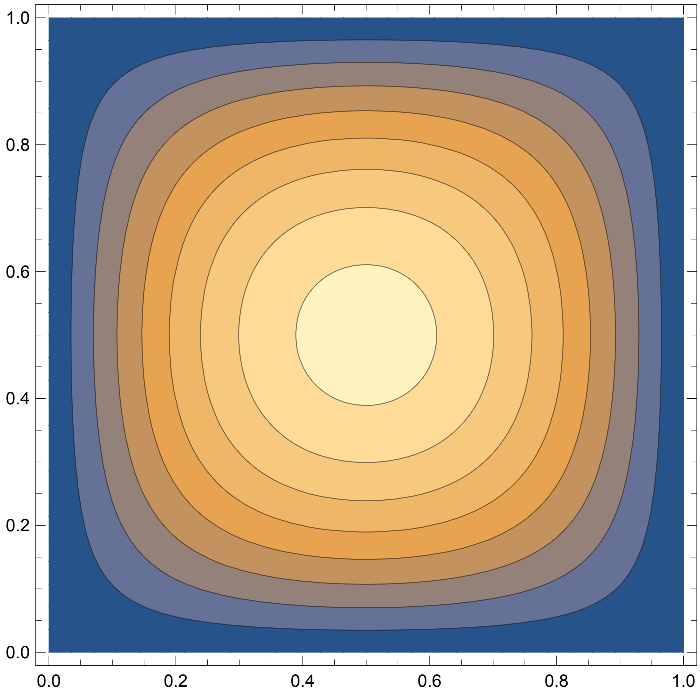
```
In[•]:= u[x_, y_, z_] = 400/π^2 Sum[Sum[1/((2 i + 1) (2 j + 1)), {j, 0, 5}], {i, 0, 5}]
        Sin[(2 i + 1) π x] Sin[(2 j + 1) π y] Exp[- π z Sqrt[(2 i + 1)^2 + (2 j + 1)^2]];

In[•]:= ContourPlot[u[x, y, 0.1], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, AspectRatio -> 1]
```

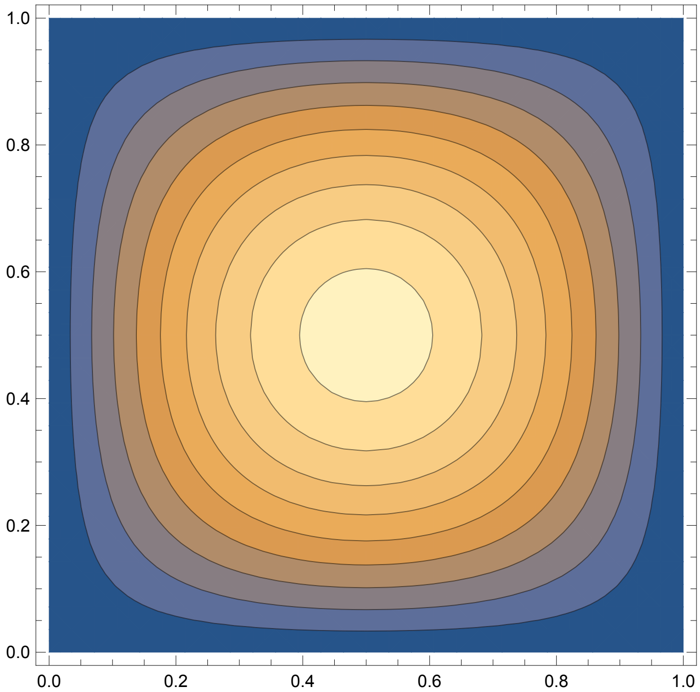
Out[•]=



In[•]:= `ContourPlot[u[x, y, 0.5], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, AspectRatio -> 1]`

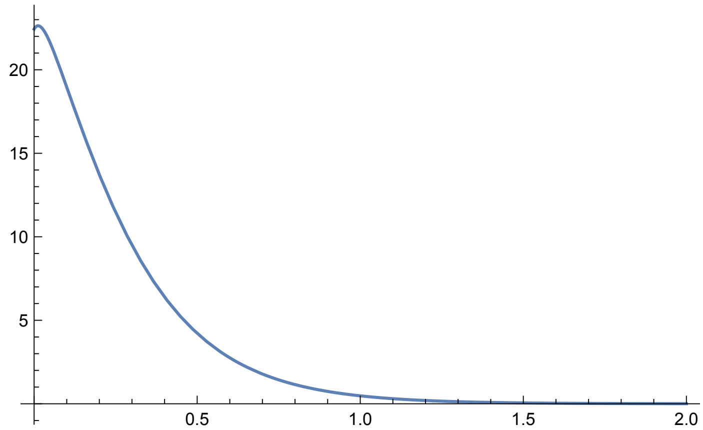
Out[•]=


In[•]:= `ContourPlot[u[x, y, 1], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, AspectRatio -> 1]`

Out[•]=


In[•]:=
```
Plot[u[0.5, 0.5, z], {z, 0, 2}, PlotRange -> All]
```

Out[•]=



(Diese Abbildungen sind nicht exakt, da wir nur die Partialreihe mit 25 Termen berücksichtigt haben.)

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.6

Lösen Sie die Laplace-Gleichung für das Innere eines Quaders der Ausdehnung a . b . c. Bis auf die Bodenfläche haben alle Grenzflächen den Wert 0; die Bodenfläche habe den Wert 100.

Lösungsweg

Die Lösung ist schließlich:

In[•]:=

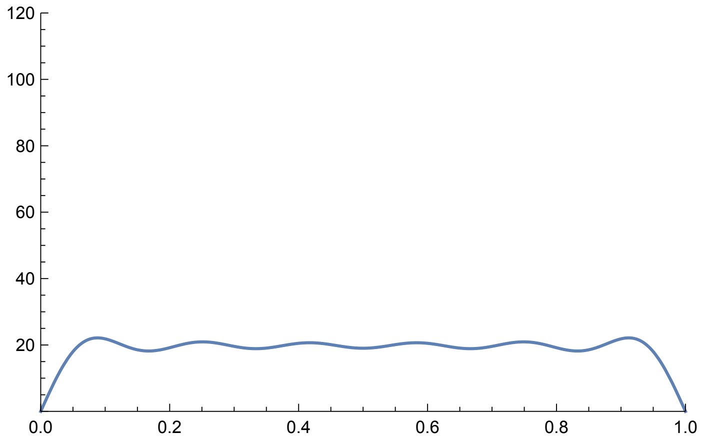
$$u[x\_, y\_, z\_] := \frac{1600}{\pi^2} \mathrm{Sum}\Big[\mathrm{Sin}[(2n+1)\pi x]\ \mathrm{Sin}[\pi(2m+1)y]\ \mathrm{Sinh}\Big[\pi\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\ (1-z)\Big] \Big/ \Big((2n+1)(2m+1) \times \mathrm{Sinh}\Big[\pi\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\Big]\Big), \{m, 0, 5\}, \{n, 0, 5\}\Big]$$

Wir wollen sie visualisieren.Dazu betrachten wir Temperatur-Profile entlang einzelner Richtungen und Flächen.Man beachte,dass wegen der geringen Zahl der Terme (n,m=0..5) die Profile "wackelig" sind. Für bessere Wiedergabe der echten Temperatur müsste man deutlich mehr Terme berücksichtigen.

Nahe einer Kante,entlang y=z=0.01:

In[∘]:= `Plot[u[x, 0.01, 0.01], {x, 0, 1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 120}}]`

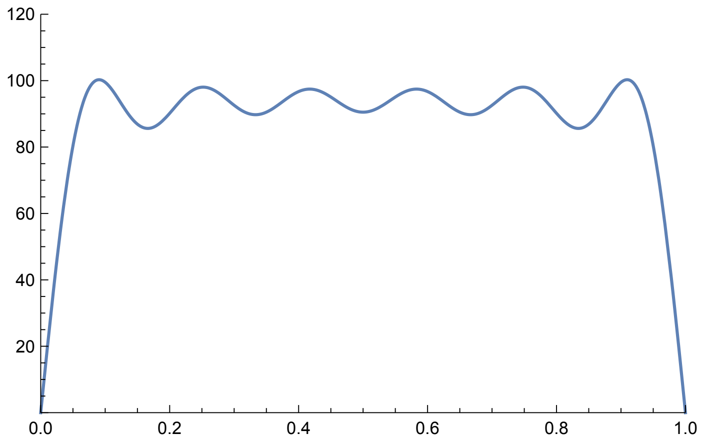
Out[∘]=



Nahe einer Randfläche,in der Mitte,entlang y=0.5,z=0.01:

In[∘]:= `Plot[u[x, 0.5, 0.01], {x, 0, 1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 120}}]`

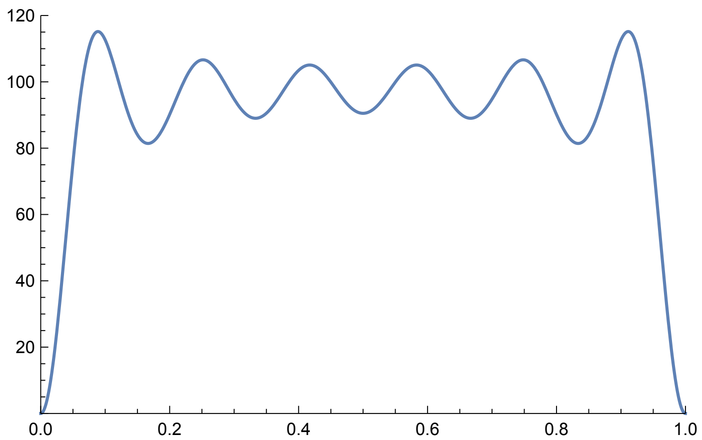
Out[∘]=



Entlang einer Randflächendiagonale, x=y, z=0.01:

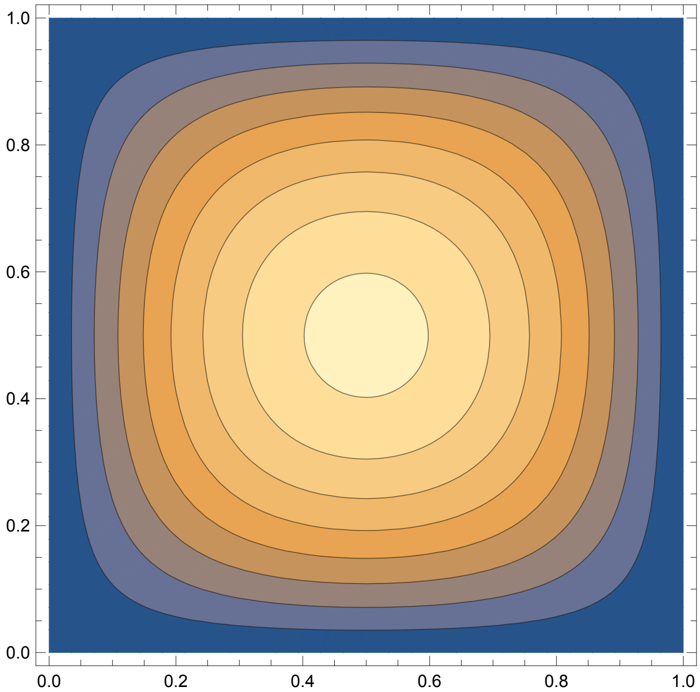
In[∘]:= `Plot[u[x, x, 0.01], {x, 0, 1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 120}}]`

Out[∘]=



In einer Fläche durch z=0.5:

In[•]:=
```
ContourPlot[u[x, y, 0.5], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.7

Finden Sie die Zeitabhängigkeit der Temperaturverteilung eines unendlich langen Zylinders (Radius a, Temperatur des Randes $T(\rho=a)=0$). Die Anfangstemperaturverteilung sei durch $T(\rho,\varphi,z)=f(\rho)$, also eine nur vom Radius abhängige Funktion gegeben.

Lösungsweg

Die Zeitabhängigkeit wird als Lösung der Wärmeleitungsgleichung ermittelt. Wir verwenden Zylinderkoordinaten ρ, φ und z. Aufgrund der Symmetrie des Problems und der Anfangsbedingung treten φ und z nicht auf. Die DG lautet

$$\triangle T(\rho, t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t} T(\rho, t)$$

und mit dem Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (M.8.1.2) finden wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\right) T(\rho, t) = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t} T(\rho, t).$$

(Man beachte: das ist nicht dasselbe, wie beim zweidimensionalen Problem einer Scheibe!)

Der Separationsansatz ist

$$T(\rho, t) = R(\rho)\, T(t)$$

und liefert die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + c^2\right) R(\rho) = 0$$

$$\to \left((c\,\rho)^2 \frac{\partial^2}{\partial (c\,\rho)^2} + (c\,\rho)\frac{\partial}{\partial (c\,\rho)} + (c\,\rho)^2\right) R(\rho) = 0$$

$$\to R(\rho) = \{J_0(c\,\rho),\ Y_0(c\,\rho)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t) = -\kappa\, c^2\, T(t)$$

$$\to T(t) = \exp\left(-\kappa\, c^2\, t\right)$$

Nur die reguläre Besselfunktion J kann eine Lösung sein (Y ist bei ρ=0 singulär). Die Randbedingung (für alle t) lautet

$$R(\rho = a) = J_0(a\,c) = 0 \to c = \frac{c_{0\,n}}{a}$$

wobei $c_{0\,n}$ die n - te Nullstelle der Besselfunktion J_0 bezeichnet.

Damit ist die allgemeine Lösung

$$T(\rho,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0\left(c_{0\,n}\,\frac{\rho}{a}\right) \exp\left(-\kappa \left(\frac{c_{0\,n}}{a}\right)^2 t\right).$$

Die Anfangsbedingung ist

$$T(\rho,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0\left(c_{0\,n}\,\frac{\rho}{a}\right) = f(\rho)$$

und die unbekannten Koeffizienten a_n müssen mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung für die Besselfunktionen berechnet werden:

$$a_n = \frac{2\int_0^1 dx\, x\, f(a\,x)\, J_0(c_{0\,n}\,x)}{[J_0{}'(c_{0\,n})]^2.}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.8

Was ist die Gleichgewichtstemperaturverteilung einer kreisförmigen flachen (keine Ausdehnung in z-Richtung) Scheibe mit Radius a für die Randbedingungen:

(a) $T(r = a,\ -\pi < \varphi < 0) = 0,$

$T(r = a,\ 0 < \varphi < \pi) = 100$

(b) $T(r = a,\ 0 < \varphi < \pi/2) = 100,$

$T(r = a,\ \pi/2 < \varphi < 2\pi]) = 0\ .$

Lösungsweg

Dazu muss man die Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen lösen. Wir verwenden Polarkoordinaten (vgl. (M.8.1.2)):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) T(r,\ \varphi) = 0\ .$$

Der Separationsansatz

$$T(r,\ \varphi) = R(r)\, F(\varphi)$$

ergibt die Gleichungen

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} - k^2\right) R(r) = 0$$

$$\to r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} R(r)\right) = k^2 R(r)$$

$\to$ Aufgabe 16.1

$$\to R(r) = \{r^k,\ r^{-k}\};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F(\varphi) = -k^2 F(\varphi)$$

$$\to F(\varphi) = \{\sin(k\varphi),\ \cos(k\varphi)\}.$$

Für positive k ist nur r^k im Ursprung regulär. Die Lösung setzt sich daher aus Termen der Form

$r^k \sin(k\varphi),\ r^k \cos(k\varphi)$

zusammen:

$$T(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$

(a)

Am Rand ist die Temperatur gegeben durch

$$T(a, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)\right)$$

$$= 50 + \begin{cases} -50 & \text{für } -\pi < \varphi < 0 \\ 50 & \text{für } 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

Da dies eine ungerade Funktion ist, verschwinden die geraden Reihenglieder (außer $a_0 = 50$).

Die Koeffizienten b_k ($k > 0$) ergeben sich aus der Fourier - Sinus - Reihe :

$$a^k b_k = \frac{100}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin[k x]$$

$$= \frac{200}{k\pi} \text{ für ungerade } k, \text{ sonst } 0.$$

Die Lösung lautet daher

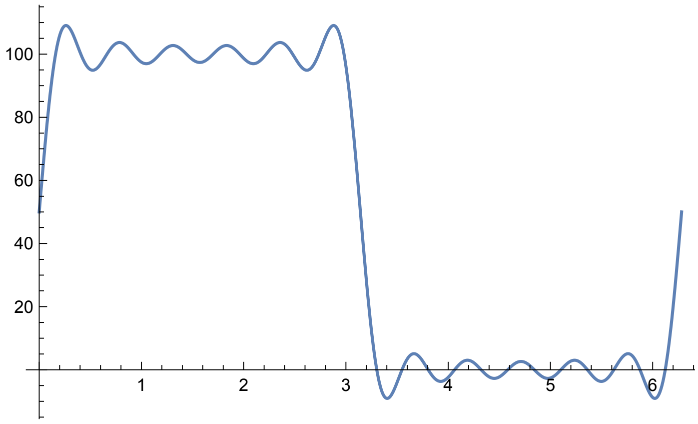
$$T(r, \varphi) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\varphi).$$

Zur graphischen Darstellung betrachten wir nur die ersten 6 Terme der Reihe:

```
In[∘]:= T[r_, φ_] = 50 + (200 / π) Sum[ 1 / (2 i + 1) (r / a) ^ (2 i + 1) ×
          Sin[(2 i + 1) φ], {i, 0, 5}];
```

Wir plotten die Temperatur am Rand:

In[•]:= `Plot[T[a, φ], {φ, 0, 2 π}]`

Out[•]= 

(b)

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten für diese Randbedingungen durch Integration:

In[•]:=
```
b[n_] = Integrate[Sin[n x] / Pi, {x, 0, Pi / 2}]
a[0] = Integrate[1 / Pi, {x, 0, Pi / 2}]
a[n_] = Integrate[Cos[n x] / Pi, {x, 0, Pi / 2}]
```

Out[•]= $\frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{n\pi}{4}\right]^2}{n\pi}$

Out[•]= $\frac{1}{2}$

Out[•]= $\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{n\pi}{2}\right]}{n\pi}$

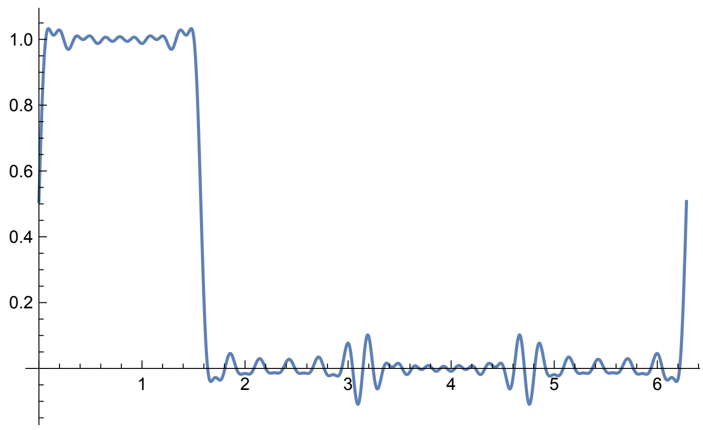
Damit ergibt sich die Temperaturverteilung (nur die ersten Terme werden dargestellt):

In[•]:= $\texttt{f[x\_]} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\,\texttt{Sum[Cos[(2 k + 1) x] (-1)^k / (2 k + 1) +}$

$\texttt{Sin[(2 k + 1) x] / (2 k + 1) + Sin[(4 k + 2) x] / (2 k + 1), \{k, 0, 10\}];}$

Visualisierung:

In[•]:= `Plot[f[x], {x, 0, 2 π}]`

Out[•]= 

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

18.9

Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen einer quadratischen (Kantenlänge a) schwingenden Membran mit fester Einspannung (Trommel). Skizzieren Sie anhand Ihrer Ergebnisse die Knotenlinien der vier niedrigsten (nichttrivialen) Eigenschwingungen.

Lösungsweg

Die (hyperbolische) Schwingungsgleichung lautet in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, y, t)$$

und der Separationsansatz

$$u(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, T(t)$$

führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\alpha^2 X$$

$$\to X(x) = \{\sin(\alpha x),\ \cos(\alpha x)\},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\beta^2 Y$$

$$\to Y(y) = \{\sin(\beta y),\ \cos(\beta y)\},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -c^2 \left(\alpha^2 + \beta^2\right) T$$

$$\to (x) = \{\sin(\gamma c t),\ \cos(\gamma c t)\},\ \text{mit}\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Die Randbedingungen ergeben die Eigenwerte

$$X(0) = 0 \to \text{kein cos} - \text{Term}$$

$$X(a) = 0 \to \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

$$Y(0) = 0 \to \text{kein cos} - \text{Term}$$

$$Y(a) = 0 \to \beta = \frac{m\pi}{a}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \pm\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2} = \gamma_{nm}$$

Nur n, m >0 ergeben schwingende Lösungen. Damit sind die Schwingungsfrequenzen festgelegt:

$$\gamma_{nm}\, c = 2\pi\, \nu_{nm} \to \nu_{nm} = \frac{c}{2a}\sqrt{n^2 + m^2}.$$

Die niedrigsten Eigenfrequenzen dieser Trommel sind daher

$$\nu_{11} = \frac{c}{2a}\sqrt{2},$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} = \frac{c}{2a}\sqrt{5},$$

$$\nu_{22} = \frac{c}{2a}\sqrt{8},$$

$\nu_{31} = \nu_{13} = \frac{c}{2\,a}\sqrt{10}$, und so weiter.

Die Knotenlinien zu diesen Frequenzen sehen wie folgt aus:

(1,1)

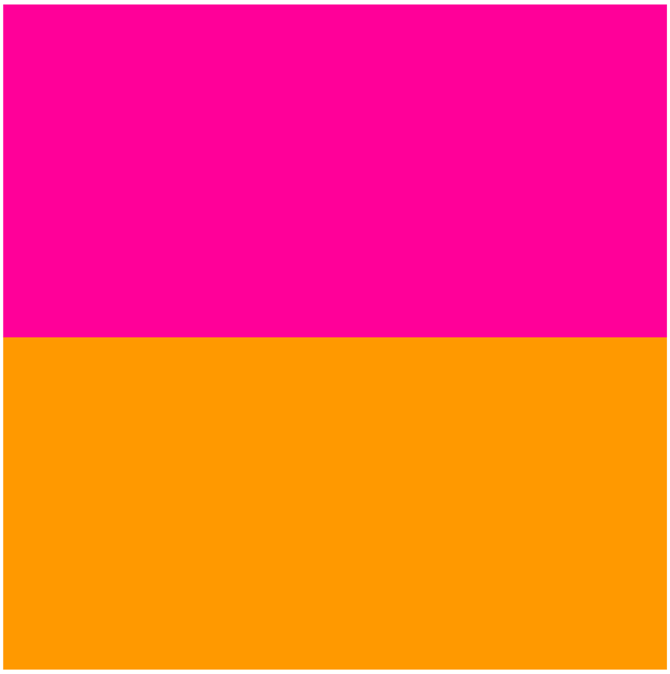
In[∘]:=
```
Show[Graphics[{Hue[0.1], Rectangle[{0, 0}, {1, 1}]}], AspectRatio -> 1]
```

Out[∘]=

(1,2)

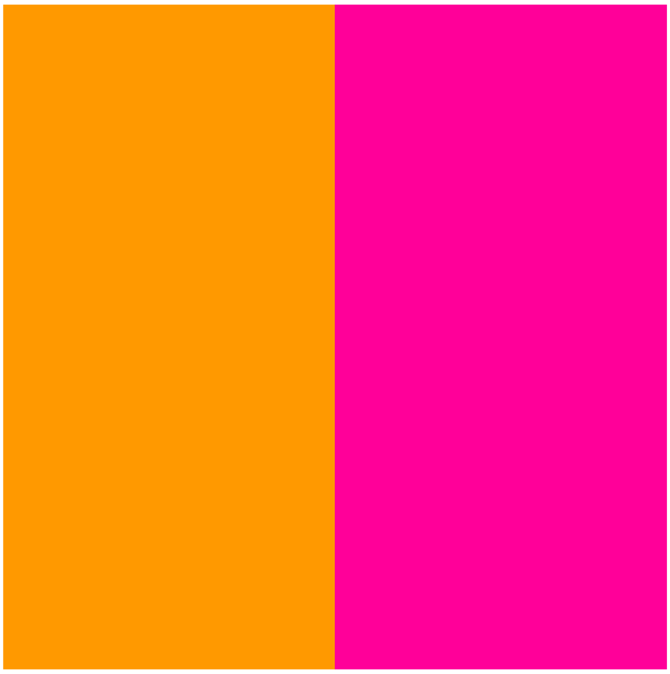
In[∘]:=
```
Show[Graphics[{Hue[0.1], Rectangle[{0, 0}, {1, 0.5}],
   Hue[0.9], Rectangle[{0, 0.5}, {1, 1}]}], AspectRatio -> 1]
```

Out[∘]=



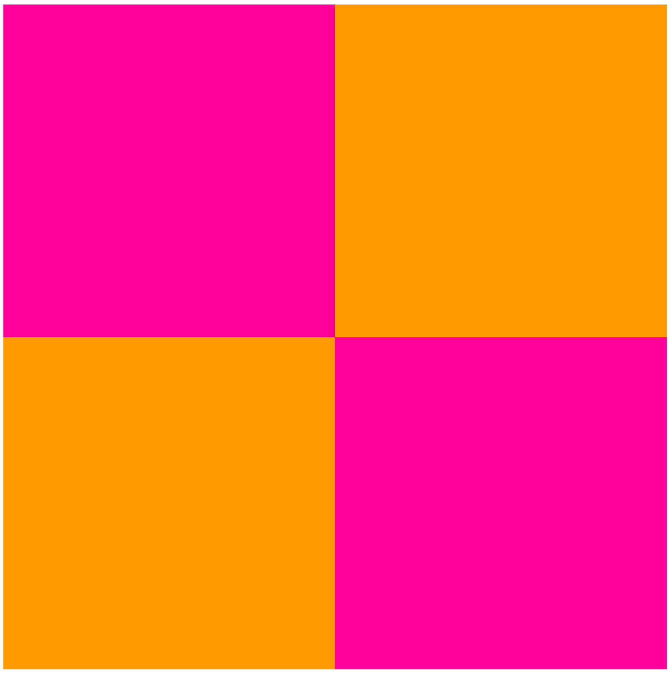
(2,1)

In[•]:=
```
Show[Graphics[{Hue[0.1], Rectangle[{0, 0}, {0.5, 1}],
   Hue[0.9], Rectangle[{0.5, 0}, {1, 1}]}], AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=


(2,2)

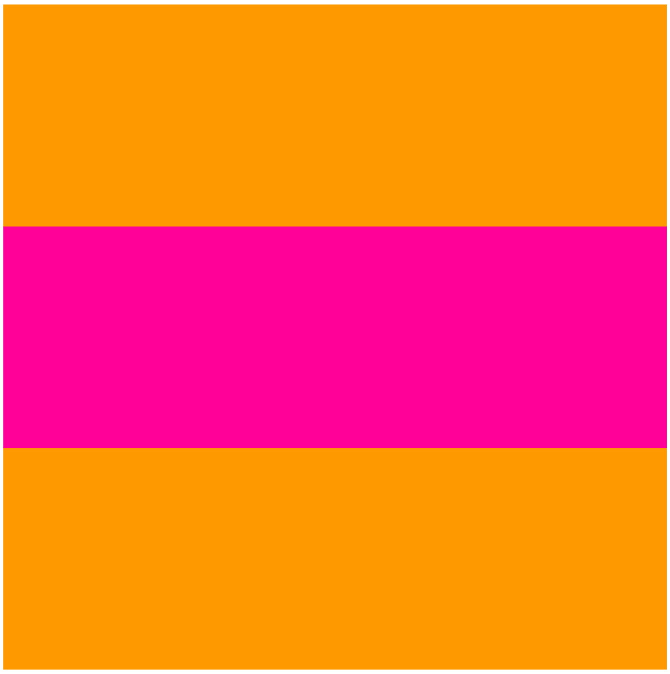
In[•]:=
```
Show[Graphics[{Hue[0.1], Rectangle[{0, 0}, {0.5, 0.5}], Hue[0.9],
   Rectangle[{0.5, 0}, {1, 0.5}], Hue[0.9], Rectangle[{0, 0.5}, {0.5, 1}],
   Hue[0.1], Rectangle[{0.5, 0.5}, {1, 1}]}], AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=


(1,3)

In[•]:=
```
Show[Graphics[{Hue[0.1], Rectangle[{0, 0}, {1, 1/3}],
    Hue[0.9], Rectangle[{0, 1/3}, {1, 2/3}], Hue[0.1],
    Rectangle[{0, 2/3}, {1, 1}]}], AspectRatio -> 1]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

18.10

Bestimmen Sie die Temperaturverteilung einer rechteckigen 1x2 Platte mit der Randtemperatur

$T(x, 0) = x^2$

$T(x, 2) = x$

$T(0, y) = 0$

$T(1, y) = 1$

(Beachten Sie (18.57)!)

Lösungsweg

Wir setzen die Lösung wie üblich als Produkt

$T(x, y) = X(x) Y(y)$

an. Die Laplace-Gleichung faktorisert dann und wir erhalten die Gleichungen

$X'' = -k^2 X$

$Y'' = k^2 Y$

Die Werte an den vier Ecken sind nicht 0. Daher benutzen wir die Lösungen für k=0, um geeignet zu transformieren.

Für k=0 gibt es die Lösungen

$a + b x + c y + d xy$

Wir berücksichtigen die Randwertangaben

$T(0,0) = a = 0 \quad \to a = 0$

$T(0,2) = a + 2c = 0 \to c = 0$

$T(1,0) = a + b = 1 \quad \to b = 1$

$T(1,2) = a + b + 2c + d = 1 \to d = 0$

und damit gibt es eine Teillösung

$u(x,y) = x$

die wir vom ursprünglichen Problem abspalten. Wenn wir die Gesamtlösung als

$T(x,y) = u(x,y) + w(x,y)$

schreiben, dann hat das Problem für w(x,y) die Randbedingungen

$w(x,0) = x^2 - x = x(x-1)$

$w(x,2) = 0$

$w(0,y) = 0$

$w(1,y) = 0$

(es ist daher an allen Ecken 0).

Wir können nun mit w(x,y)=X(x)Y(y) weiter arbeiten, wie vorher, und brauchen nun nur mehr Werte k≠0 zu betrachten.

Es ergibt sich

Die (hyperbolische) Schwingungsgleichung lautet in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 X \to X(x) = \{\sin(k x), \cos(k x)\},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2 Y \to Y(y) = \{\exp(k y), \exp(-k y)\},$$

Wegen w(0,y)=0 trägt cos(kx) nicht bei.
Wegen w(1,y)=0 ergibt sich ein Eigenwert für k:

$\sin(k) = 0 \to k = n\pi$

Der allgemeine Ansatz für w lautet daher

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{n\pi y} + b_n e^{-n\pi y}) \sin(n\pi x)$$

Wegen w(x,2)=0 folgt

$$w(x,2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n\pi 2} + b_n e^{-n\pi 2}\right) \sin(n\pi x) = 0$$

$$\longrightarrow a_n e^{2n\pi} + b_n e^{-2n\pi} = 0 \longrightarrow b_n = -a_n e^{4n\pi}$$

$$\longrightarrow w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n e^{n\pi y} - a_n e^{-n\pi y} e^{4n\pi}\right) \sin(n\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\pi} \left(a_n e^{n\pi(y-2)} - a_n e^{-n\pi(-2)y}\right) \sin(n\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(n\pi(2-y)) \sin(n\pi x)$$

Dabei haben wir die Konstante umdefiniert, um eine einfache Form zu erhalten. Man sieht hier sofort, dass w(x,2)=0.

Nun fehlt nur noch die Randbedingung

$$w(x,0) = x^2 - x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(2n\pi)\sin(n\pi x)$$

Es handelt sich offenbar um eine Fourier-Sinus-Reihe. Wir können die Koeffizienten durch Projektion mit sin(kπx) bestimmen:

$$\int_0^1 (x^2 - x)\sin(k\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(2n\pi)\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(k\pi x)\,dx$$

und wegen der Orthogonalität

$$\int_0^1 (x^2 - x)\sin(k\pi x)\,dx = c_k \frac{1}{2}\sinh(2k\pi)$$

In[∘]:=
```
Integrate[(x^2 - x) Sin[k π x], {x, 0, 1}]
```

Out[∘]=

$$\frac{-2 + 2\,\mathrm{Cos}[k\pi] + k\pi\,\mathrm{Sin}[k\pi]}{k^3\pi^3}$$

Das ist (k ganzzahlig!)

$$\frac{-2 + 2(-1)^k}{k^3\pi^3} \to \frac{-4}{k^3\pi^3} \text{ für ungerade k, sonst } 0$$

Wir finden für w die Lösung

$$w(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-8}{(2n+1)^3\pi^3\sinh(2(2n+1)\pi)}\sinh((2n+1)\pi(2-y))\sin((2n+1)\pi x)$$

und für die Gesamt-Temperaturverteilung

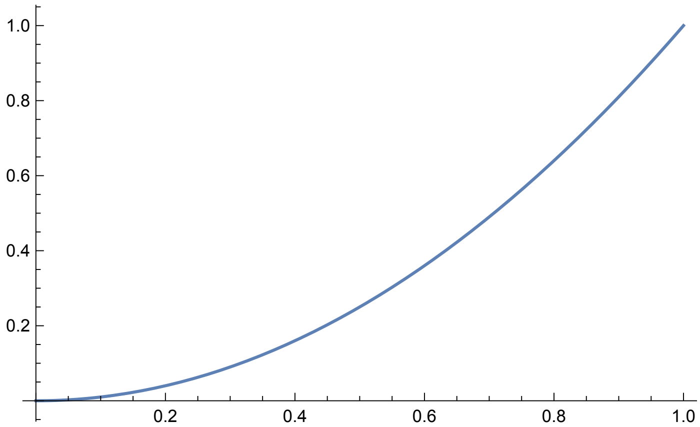
$$T(x,y) = x - \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\frac{\sinh((2n+1)\pi(2-y))}{\sinh(2(2n+1)\pi)}\sin((2n+1)\pi x)$$

Zur Kontrolle wollen wir uns die Verteilung am Rand nochmals ansehen:

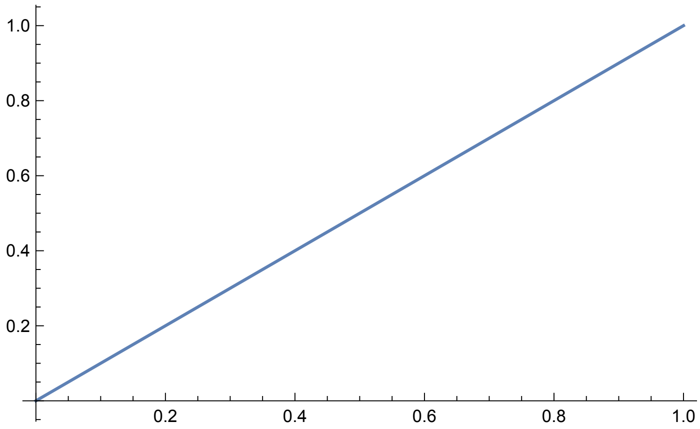
In[∘]:=
```
T[x_, y_] := x - 8/π^3 Sum[1/(2 n + 1)^3 Sinh[(2 n + 1) π (2 - y)]/Sinh[2 (2 n + 1) π] Sin[(2 n + 1) π x], {n, 0, 20}]
```

In[∘]:=
```
Plot[T[x, 0], {x, 0, 1}]
```

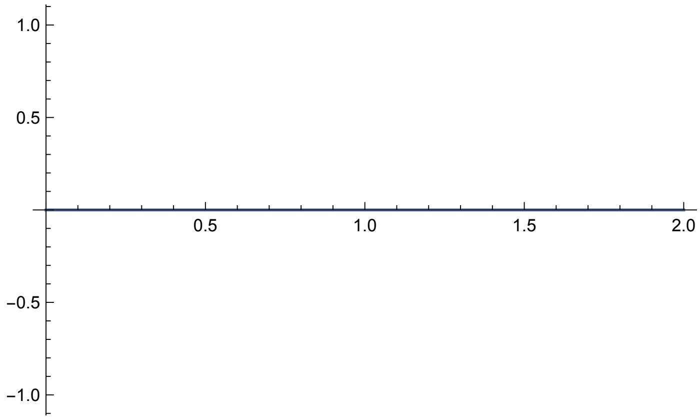
Out[∘]=



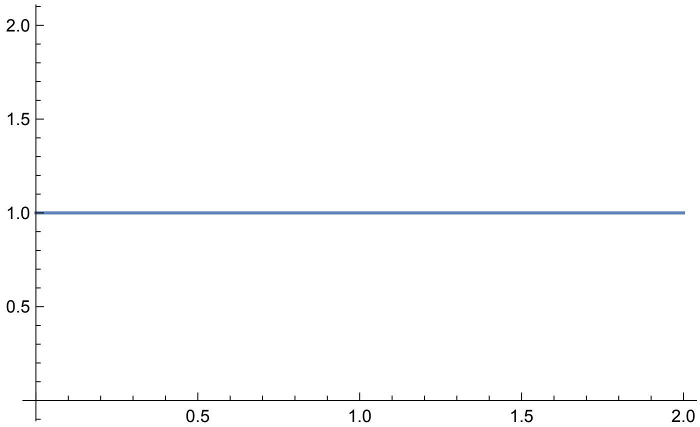
In[•]:= `Plot[T[x, 2], {x, 0, 1}]`

Out[•]=


In[•]:= `Plot[T[0, y], {y, 0, 2}]`

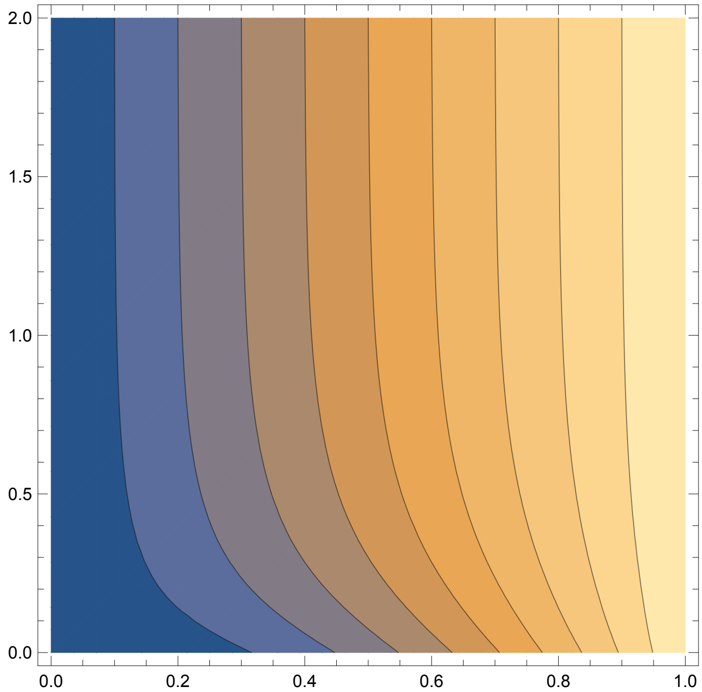
Out[•]=


In[•]:= `Plot[T[1, y], {y, 0, 2}]`

Out[•]=


In[•]:=
```
ContourPlot[T[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 2}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```