

Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 19. Funktionentheorie

19.4

Man beweise mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Relationen, dass

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

bei $z=2$ nicht analytisch ist.

Lösungsweg

$$\begin{aligned} \text{In[*]:= } u[x_, y_] &= \text{Simplify}\left[\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{(x+I y-2)} + \frac{1}{(x-I y-2)}\right)\right] \\ \text{Out[*]:= } & \frac{-2+x}{4-4 x+x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In[*]:= } v[x_, y_] &= \text{Simplify}\left[\left(\frac{1}{2 I}\right) \left(\frac{1}{(x+I y-2)} - \frac{1}{(x-I y-2)}\right)\right] \\ \text{Out[*]:= } & -\frac{y}{4-4 x+x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In[*]:= } ux &= \text{Simplify}[D[u[x, y], x]] \\ \text{Out[*]:= } & \frac{-4+4 x-x^2+y^2}{(4-4 x+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In[*]:= } vy &= \text{Simplify}[D[v[x, y], y]] \\ \text{Out[*]:= } & \frac{-4+4 x-x^2+y^2}{(4-4 x+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

```
In[ ]:= Simplify[ux - vy]
```

```
Out[ ]:= 0
```

Offenbar ist also $u_x = v_y$! Analoges zeigt man für $u_y = -v_x$.

Allerdings ist Mathematica (und uns) hier eine Feinheit entgangen: Sowohl u als auch v sind bei $(x=2, y=0)$ nicht definiert, da unbestimmte Formen; der Grenzwert zeigt, dass sie dort singulär sind!

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.6

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

(a) Man finde df/dz und (b) zeige, wo die Funktion nicht analytisch ist.

Lösungsweg

Wir formen günstig um:

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{2 - (1-z)}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1.$$

Es handelt sich also um einen Pol bei $z=1$. Analog zu Aufgabe 4 sieht man: diese Funktion ist nur bei $z=1$ nicht analytisch.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.7

Finden Sie den Realteil $u(x,y)$ und den Imaginärteil $v(x,y)$ folgender Funktionen, und skizzieren Sie den Verlauf der Kurven $u(x,y)=\alpha$, $v(x,y)=\beta$.

(a) z^4

(b) $z^2 + z$

(c) e^z

(d) $2z + \frac{3}{z} + 2$

(e) $z + \frac{i}{z} - i$

(f) $\frac{1}{z^2} - 1$

(g) e^{iz}

(h) $\ln z$.

Lösungsweg

(a)

```
In[ ]:= z = x + I y;
      f[z_] = z^4;
      f[z] // ComplexExpand
```

```
Out[ ]:= x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4 + I (4 x^3 y - 4 x y^3)
```

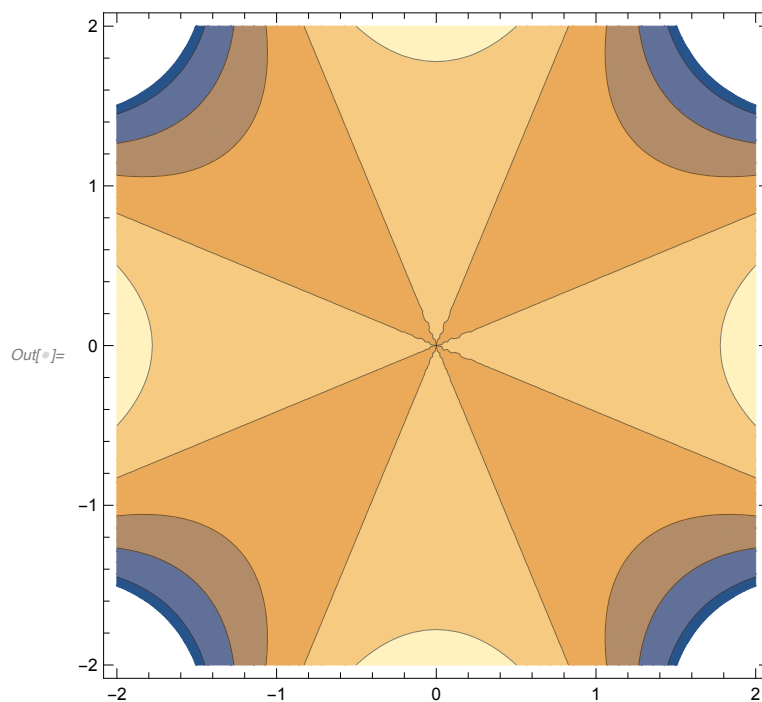
```
In[ ]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
      v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

```
Out[ ]:= x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4
```

```
Out[ ]:= 4 x^3 y - 4 x y^3
```

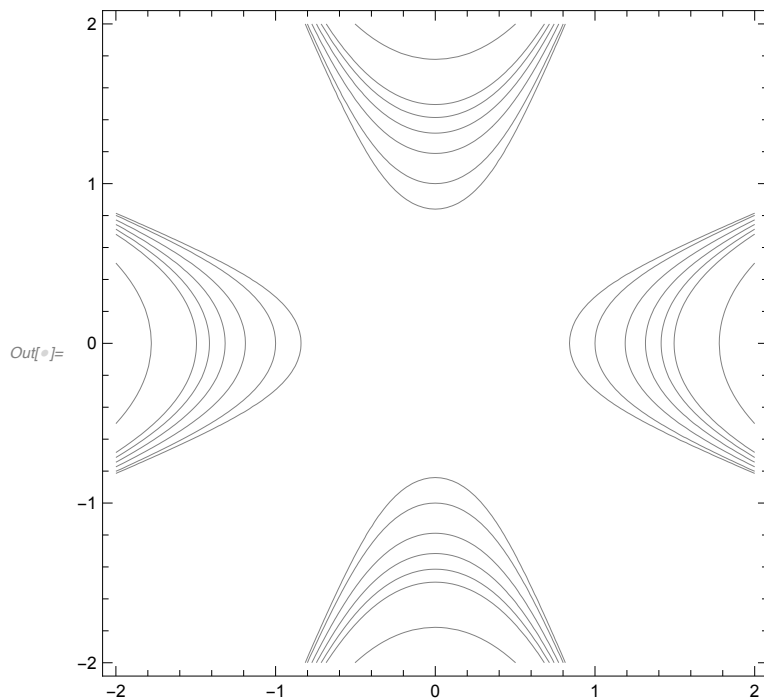
Zuerst verwenden wir die Default-Einstellungen des Kontur-Plotprogramms:

```
In[ ]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



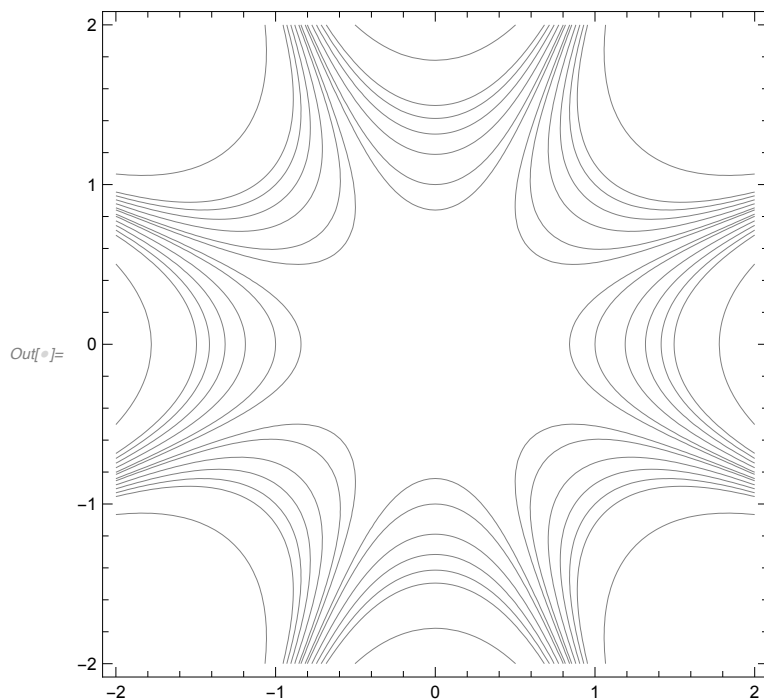
Um mehr Kontrolle über die Skizze zu haben, geben wir nun explizite Werte für α an:

```
In[ ]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  ContourShading -> False, Contours -> {0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100}]
```



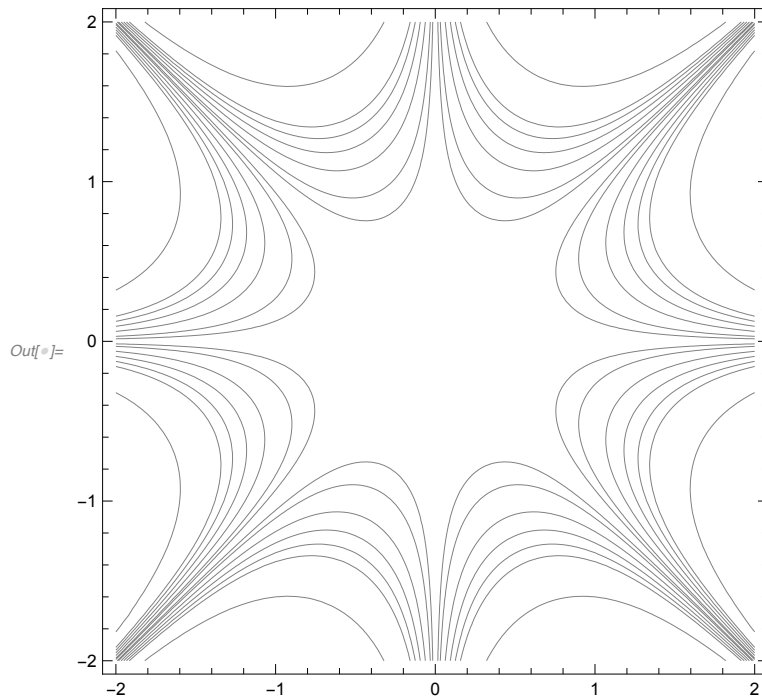
Offenbar müssen wir auch negative Werte angeben, um ein vollständiges Bild zu erhalten.

```
In[ ]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False, Contours ->
  {-0.5, -1, -2, -3, -4, -5, -10, -50, -100, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100}]
```



Entsprechend für $v(x, y)$:

```
In[ ]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, ContourShading -> False, Contours ->
{-0.5, -1, -2, -3, -4, -5, -10, -50, -100, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 50, 100}]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(b)

```
In[ ]:= z = x + I y;
f[z_] = z^2 + z;
f[z] // ComplexExpand
```

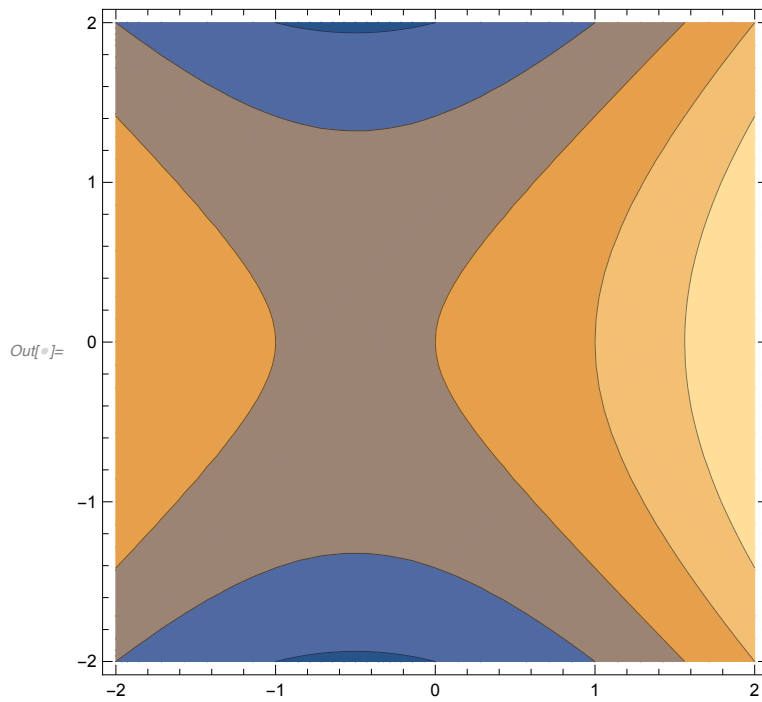
Out[]:= $x + x^2 - y^2 + \text{i} (y + 2xy)$

```
In[ ]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

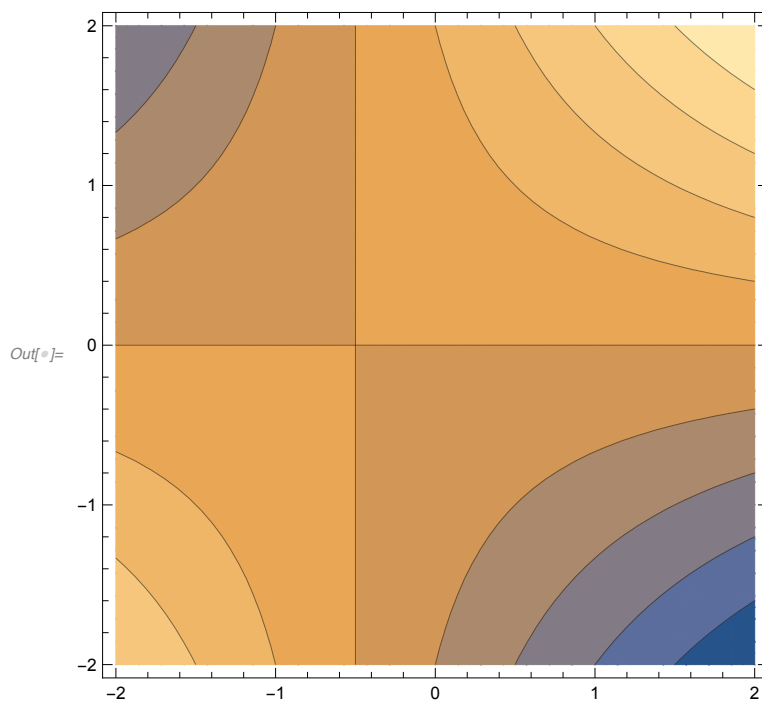
Out[]:= $x + x^2 - y^2$

Out[]:= $y + 2xy$

```
In[ ]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



```
In[ ]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(c)

```
In[ ]:= z = x + I y;
f[z_] = E^z;
f[z] // ComplexExpand
```

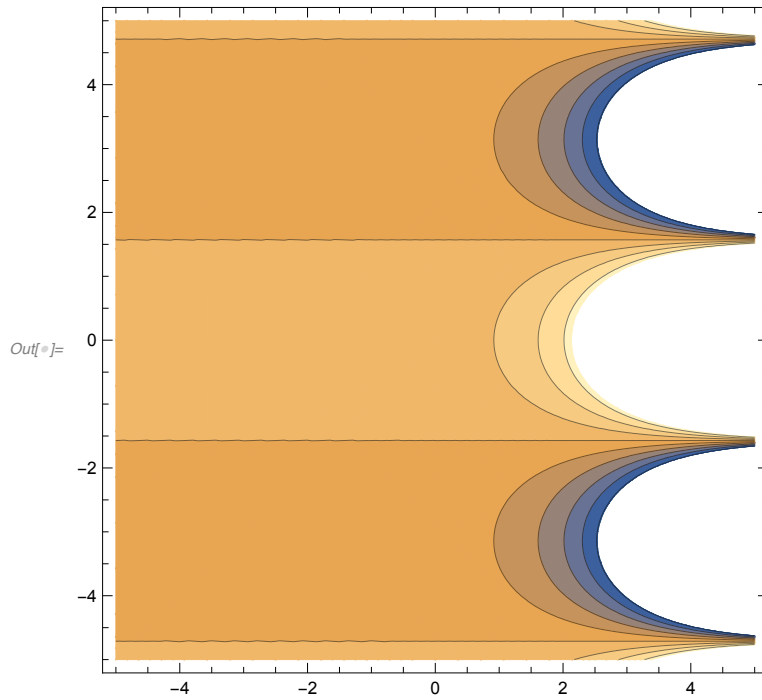
Out[]:= $e^x \cos[y] + i e^x \sin[y]$

```
In[*]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
        v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

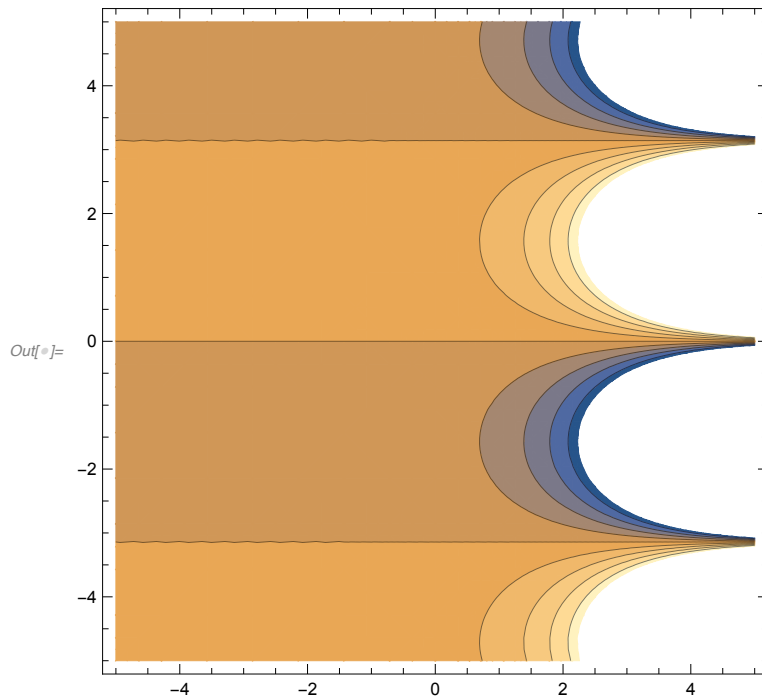
```
Out[*]:= e^x Cos[y]
```

```
Out[*]:= e^x Sin[y]
```

```
In[*]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



```
In[*]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```



```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

(d)

In[]:= $z = x + I y;$

$f[z_] = 2 z + \frac{3}{z} + 2;$

$f[z] // \text{ComplexExpand}$

Out[]:= $2 + 2 x + \frac{3 x}{x^2 + y^2} + i \left(2 y - \frac{3 y}{x^2 + y^2} \right)$

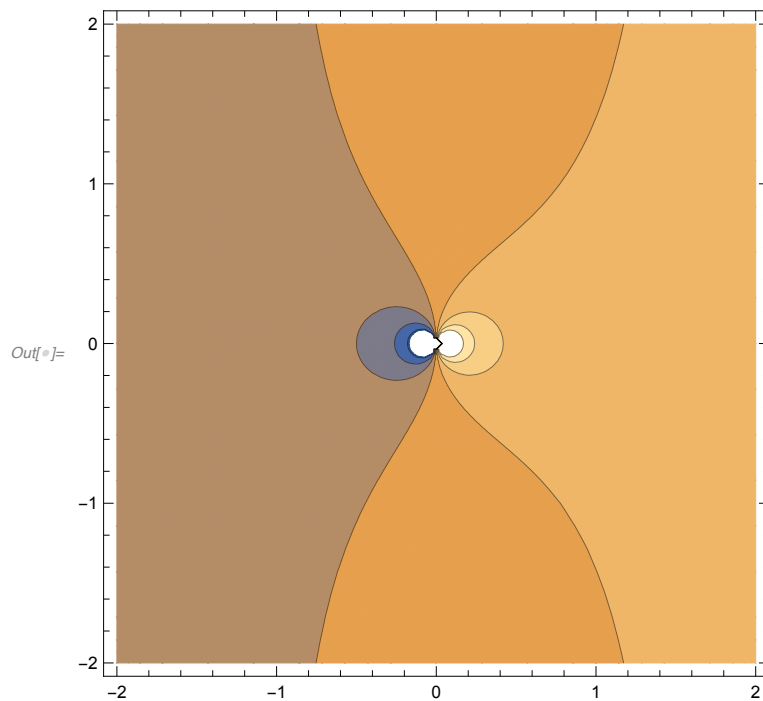
In[]:= $u[x_, y_] = (\text{Re}[f[z]] // \text{ComplexExpand})$

$v[x_, y_] = (\text{Im}[f[z]] // \text{ComplexExpand})$

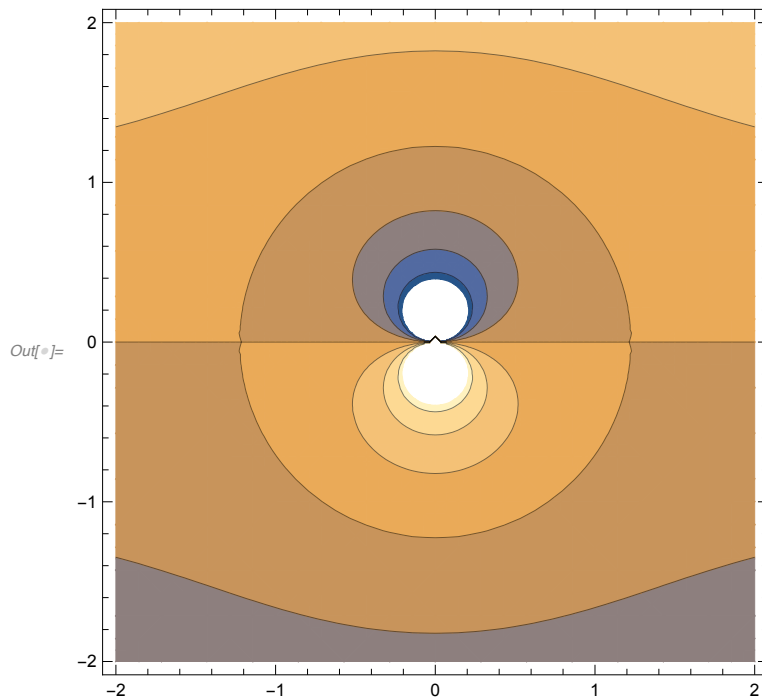
Out[]:= $2 + 2 x + \frac{3 x}{x^2 + y^2}$

Out[]:= $2 y - \frac{3 y}{x^2 + y^2}$

In[]:= $\text{ContourPlot}[u[x, y], \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}]$

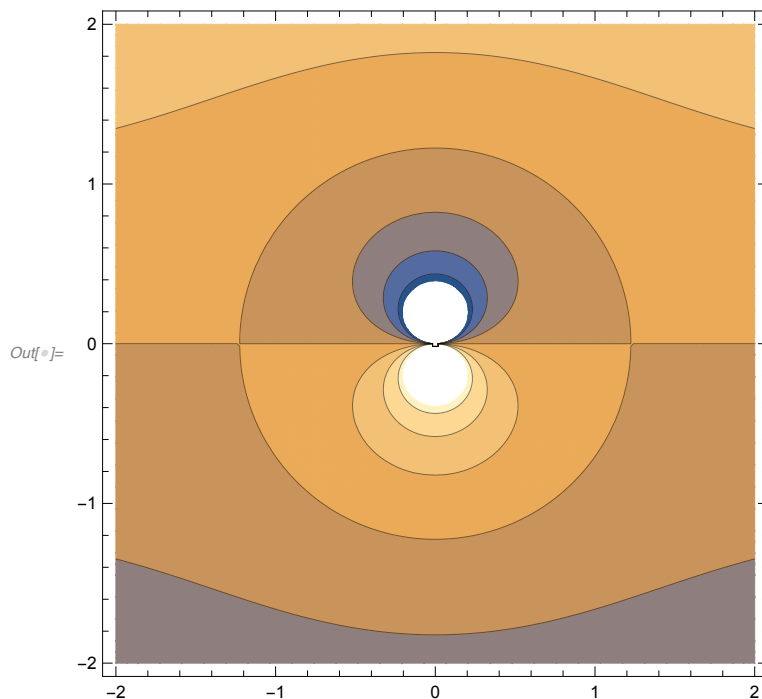


```
In[ ]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Beachten Sie, dass die Gegend um die Polposition Probleme in der Darstellung zeigt. Mit einem feineren Grid der Darstellung wird dies etwas glatter, aber der Pol bei $z=0$ wird immer zu Schwierigkeiten führen.

```
In[ ]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(e)

```
In[*]:= z = x + I y;
```

```
f[z_] = z +  $\frac{I}{z}$  - I ;
```

```
f[z] // ComplexExpand
```

```
Out[*]:=  $x + \frac{y}{x^2 + y^2} + i \left( -1 + y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ 
```

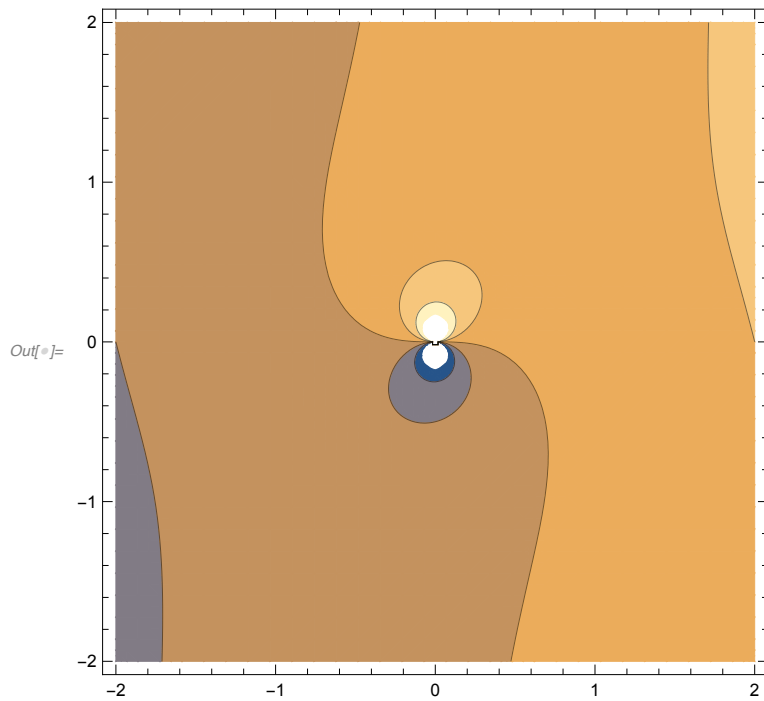
```
In[*]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
```

```
v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

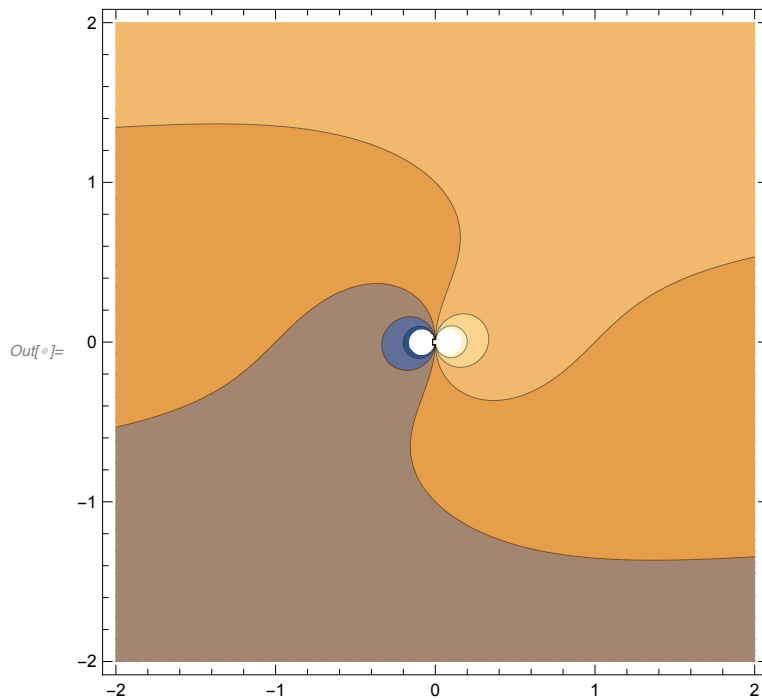
```
Out[*]:=  $x + \frac{y}{x^2 + y^2}$ 
```

```
Out[*]:=  $-1 + y + \frac{x}{x^2 + y^2}$ 
```

```
In[*]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[8]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[9]:= ClearAll["Global`*"];
```

(f)

```
In[10]:= z = x + I y;
```

```
f[z_] = 1/z^2 - 1;
```

```
f[z] // ComplexExpand
```

Out[10]= $-1 + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2 i x y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

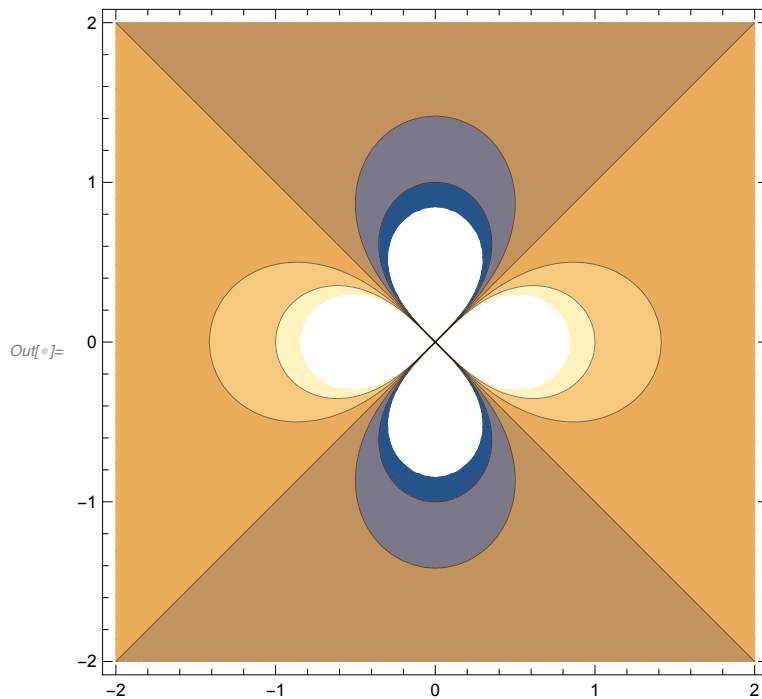
```
In[11]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
```

```
v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

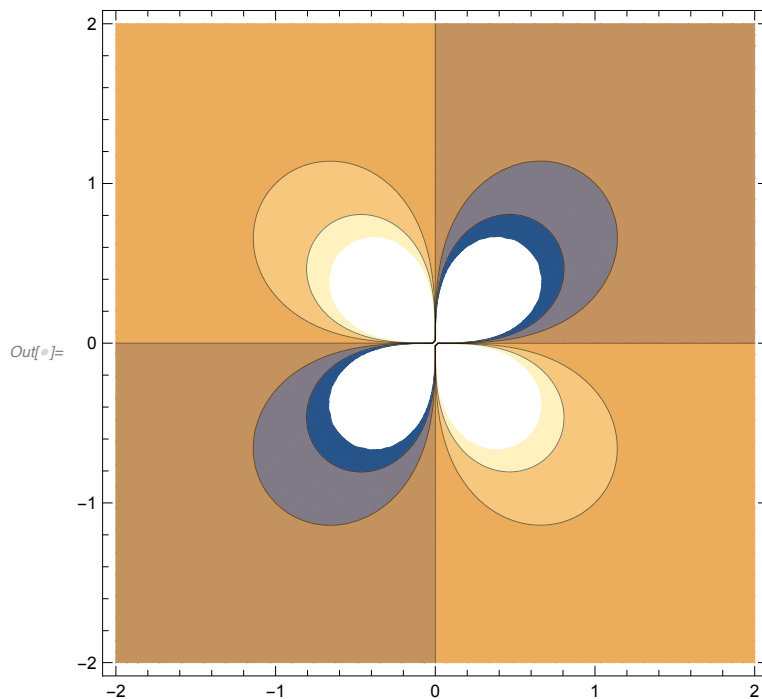
Out[11]= $-1 + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

Out[12]= $-\frac{2 x y}{(x^2 + y^2)^2}$

```
In[ ]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[ ]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(g)

```
In[ ]:= z = x + I y;
f[z_] = E^(I z) ;
f[z] // ComplexExpand
```

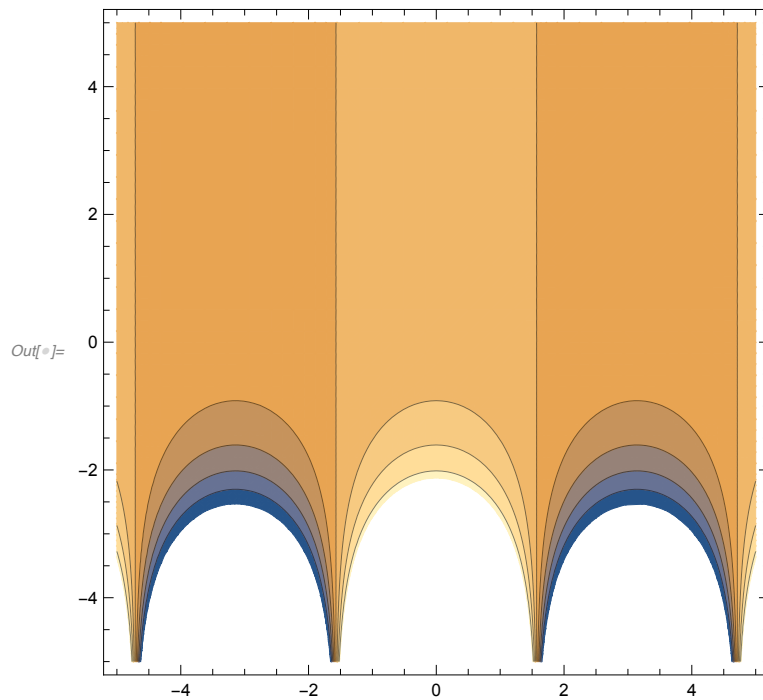
Out[]:= $e^{-y} \cos[x] + i e^{-y} \sin[x]$

```
In[*]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
        v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

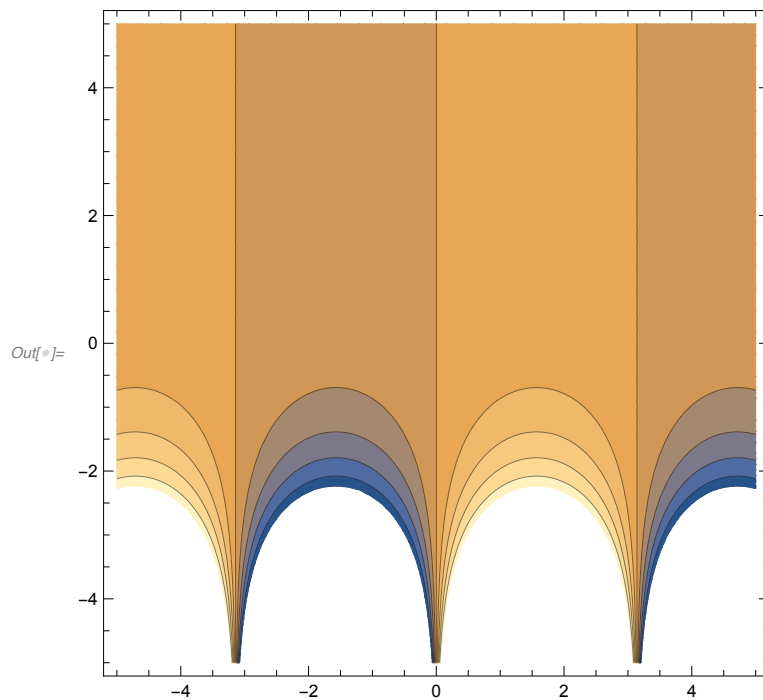
```
Out[*]:= e-y Cos[x]
```

```
Out[*]:= e-y Sin[x]
```

```
In[*]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[*]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotPoints -> 30]
```



Man vergleiche mit Aufgabe (b)!

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

(h)

```
In[*]:= z = x + I y;
```

```
f[z_] = Log[z] ;
```

```
f[z] // ComplexExpand
```

```
Out[*]= I Arg[x + I y] +  $\frac{1}{2}$  Log[x2 + y2]
```

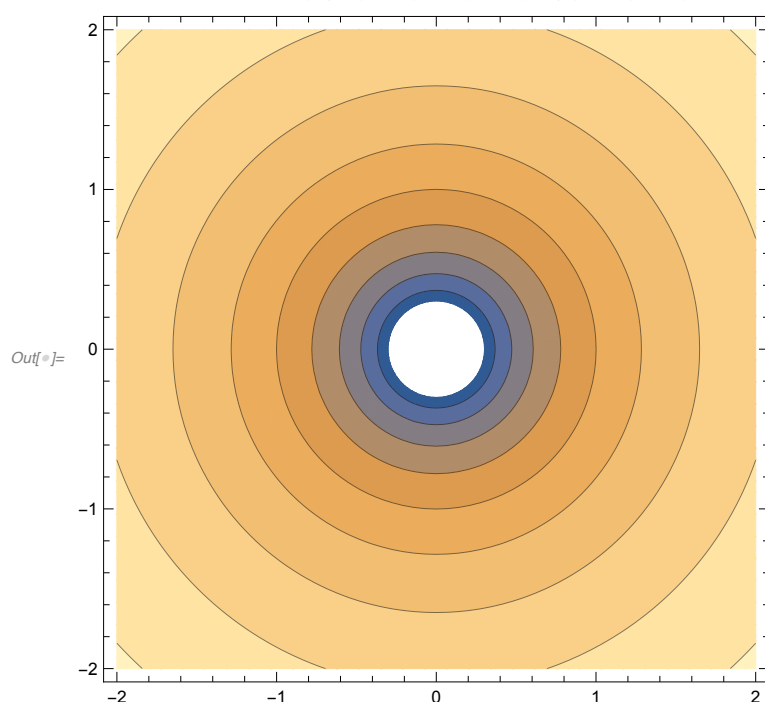
```
In[*]:= u[x_, y_] = (Re[f[z]] // ComplexExpand)
```

```
v[x_, y_] = (Im[f[z]] // ComplexExpand)
```

```
Out[*]=  $\frac{1}{2}$  Log[x2 + y2]
```

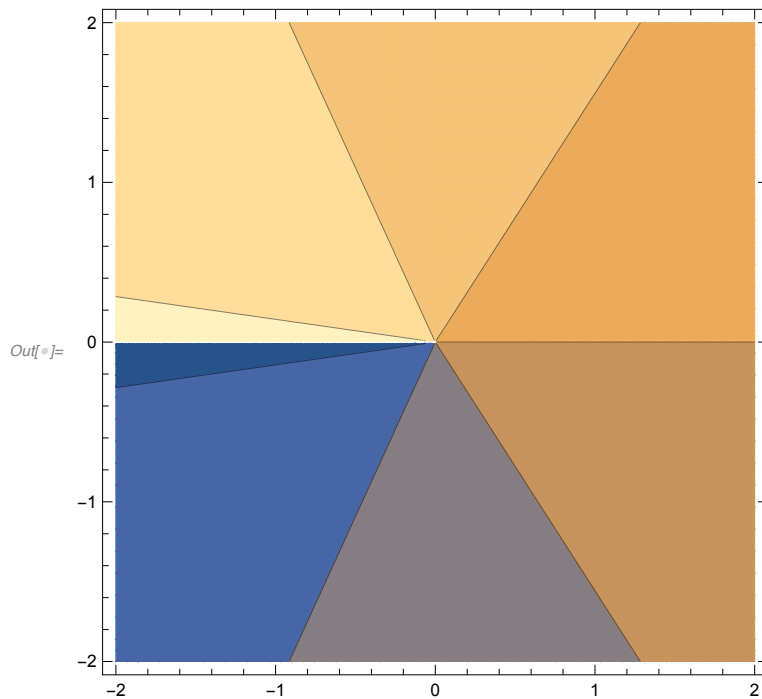
```
Out[*]= Arg[x + I y]
```

```
In[*]:= ContourPlot[u[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



Man sieht hier sehr schön, dass $\text{Log}[z]$ eine rotationssymmetrische Funktion ist. $\text{Arg}[z] = \text{Arc-tan}[y/x]$ ist für feste φ konstant:

```
In[*]:= ContourPlot[v[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 30]
```



```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.9

Sind die Funktionen harmonisch? Wenn ja, was ist die Partnerfunktion $v(x,y)$ sowie $f(z)$?

- (a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$
- (b) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$
- (c) $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.

Lösungsweg

(a)

```
In[*]:= u[x_, y_] = 2 x (1 - y);
```

```
In[*]:= ux = D[u[x, y], x]
```

```
uxx = D[ux, x]
```

```
Out[*]= 2 (1 - y)
```

```
Out[*]= 0
```

```
In[*]:= uy = D[u[x, y], y]
```

```
uyy = D[uy, y]
```

```
Out[*]= -2 x
```

```
Out[*]= 0
```

Offenbar ist also $u_{xx} + u_{yy} = 0$, die Laplace-Gleichung ist erfüllt und u ist eine harmonische Funktion.

Zur Berechnung der Partnerfunktion verwenden wir die Cauchy-Riemann Relationen:

```
In[*]:= vy = ux
```

```
Out[*]:= 2 (1 - y)
```

```
In[*]:= Integrate[vy, y]
```

```
Out[*]:= 2 y - y^2
```

Wir haben noch eine möglicherweise x-abhängige Integrationskonstante zu berücksichtigen, finden also

```
In[*]:= v[x_, y_] = 2 y - y^2 + c[x]
```

```
Out[*]:= 2 y - y^2 + c[x]
```

Daraus folgt

```
In[*]:= vx = D[v[x, y], x]
```

```
Out[*]:= c'[x]
```

was nach Gleichsetzung (Cauchy-Riemann Relation) mit $-u_y$ ergibt:

$c'[x] = 2x$ und daraus $c[x] = x^2 + \alpha$

```
In[*]:= c[x] = x^2 + α
```

```
Out[*]:= x^2 + α
```

Daher ist

```
In[*]:= v[x, y]
```

```
Out[*]:= x^2 + 2 y - y^2 + α
```

```
In[*]:= f[x, y] = u[x, y] + I v[x, y]
```

```
Out[*]:= 2 x (1 - y) + I (x^2 + 2 y - y^2 + α)
```

```
In[*]:= Expand[Simplify[2 x (1 - y) + I (x^2 + 2 y - y^2 + α) /.
  {x -> (z + zbar) / 2, y -> -I (z - zbar) / 2}]]
```

```
Out[*]:= 2 z + I z^2 + I α
```

```
In[*]:= f[z_] = %
```

```
Out[*]:= 2 z + I z^2 + I α
```

Wir überprüfen noch einmal das Endergebnis:

```
In[*]:= Re[f[x + I y]] // ComplexExpand
```

```
Out[*]:= 2 x - 2 x y
```

und das stimmt tatsächlich mit der Angabe überein.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

(b)

```
In[*]:= u[x_, y_] = x^2 - y^2 - 2 x y - 2 x + 3 y;
```

```
In[*]:= ux = D[u[x, y], x]
        uxx = D[ux, x]
```

```
Out[*]= -2 + 2 x - 2 y
```

```
Out[*]= 2
```

```
In[*]:= uy = D[u[x, y], y]
        uyy = D[uy, y]
```

```
Out[*]= 3 - 2 x - 2 y
```

```
Out[*]= -2
```

```
In[*]:= Simplify[uxx + uyy]
```

```
Out[*]= 0
```

Offenbar ist also $u_{xx} + u_{yy} = 0$, die Laplace-Gleichung ist erfüllt und u ist eine harmonische Funktion.

Zur Berechnung der Partnerfunktion verwenden wir die Cauchy-Riemann Relationen:

```
In[*]:= vy = ux
```

```
Out[*]= -2 + 2 x - 2 y
```

Wir haben bei der Integration eine möglicherweise x -abhängige Integrationskonstante zu berücksichtigen, finden also

```
In[*]:= Clear[c];
        v[x_, y_] = Integrate[vy, y] + c[x]
```

```
Out[*]= -2 y + 2 x y - y^2 + c[x]
```

Daraus folgt

```
In[*]:= vx = D[v[x, y], x]
```

```
Out[*]= 2 y + c'[x]
```

was nach Gleichsetzung (Cauchy-Riemann Relation) mit $-u_y$ ergibt:

```
In[*]:= vx + uy == 0
```

```
Out[*]= 3 - 2 x + c'[x] == 0
```

$c'[x] = -3 + 2x$ und daraus

```
In[*]:= c[x_] = Integrate[-3 + 2 x, x] + α
```

```
Out[*]= -3 x + x^2 + α
```

Daher ist

```
In[*]:= v[x, y]
```

```
Out[*]= -3 x + x^2 - 2 y + 2 x y - y^2 + α
```

```
In[*]:= f[x, y] = u[x, y] + I v[x, y]
```

```
Out[*]= -2 x + x^2 + 3 y - 2 x y - y^2 + i (-3 x + x^2 - 2 y + 2 x y - y^2 + α)
```

```
In[*]:= Expand[Simplify[f[x, y] /.
  {x -> (z + zbar) / 2, y -> -I (z - zbar) / 2}]]
```

```
Out[*]:= (-2 - 3 I) z + (1 + I) z^2 + I α
```

```
In[*]:= f[z_] = %
```

```
Out[*]:= (-2 - 3 I) z + (1 + I) z^2 + I α
```

Wir überprüfen noch einmal das Endergebnis:

```
In[*]:= Re[f[x + I y]] // ComplexExpand
```

```
Out[*]:= -2 x + x^2 + 3 y - 2 x y - y^2
```

und das stimmt tatsächlich mit der Angabe überein.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

(c)

```
In[*]:= u[x_, y_] = E^-x (x Sin[y] - y Cos[y]);
```

```
In[*]:= ux = D[u[x, y], x]
```

```
uxx = D[ux, x]
```

```
Out[*]:= e^-x Sin[y] - e^-x (-y Cos[y] + x Sin[y])
```

```
Out[*]:= -2 e^-x Sin[y] + e^-x (-y Cos[y] + x Sin[y])
```

```
In[*]:= uy = D[u[x, y], y]
```

```
uyy = D[uy, y]
```

```
Out[*]:= e^-x (-Cos[y] + x Cos[y] + y Sin[y])
```

```
Out[*]:= e^-x (y Cos[y] + 2 Sin[y] - x Sin[y])
```

```
In[*]:= Simplify[uxx + uyy]
```

```
Out[*]:= 0
```

Offenbar ist also $u_{xx} + u_{yy} = 0$, die Laplace-Gleichung ist erfüllt und u ist eine harmonische Funktion.

Zur Berechnung der Partnerfunktion verwenden wir die Cauchy-Riemann Relationen:

```
In[*]:= vy = ux
```

```
Out[*]:= e^-x Sin[y] - e^-x (-y Cos[y] + x Sin[y])
```

Wir haben bei der Integration eine möglicherweise x -abhängige Integrationskonstante zu berücksichtigen, finden also

```
In[*]:= Clear[c];
```

```
v[x_, y_] = Integrate[vy, y] + c[x]
```

```
Out[*]:= c[x] + e^-x (x Cos[y] + y Sin[y])
```

Daraus folgt

```
In[*]:= vx = D[v[x, y], x]
```

```
Out[*]:= e^-x Cos[y] - e^-x (x Cos[y] + y Sin[y]) + c'[x]
```

was nach Gleichsetzung (Cauchy-Riemann Relation) mit $-u_y$ ergibt:

```
In[*]:= Simplify[vx + uy] == 0
```

```
Out[*]:= c'[x] == 0
```

$c'[x] = 0$ und daraus

```
In[*]:= c[x_] = α
```

```
Out[*]:= α
```

Daher ist

```
In[*]:= v[x, y]
```

```
Out[*]:= α + e-x (x Cos[y] + y Sin[y])
```

```
In[*]:= f[x, y] = u[x, y] + I v[x, y]
```

```
Out[*]:= e-x (-y Cos[y] + x Sin[y]) + I (α + e-x (x Cos[y] + y Sin[y]))
```

```
In[*]:= Expand[Simplify[f[x, y] /.  
  {x -> (z + zbar) / 2, y -> -I (z - zbar) / 2}]]
```

```
Out[*]:= I e-z z + I α
```

```
In[*]:= f[z_] = %
```

```
Out[*]:= I e-z z + I α
```

Wir überprüfen noch einmal das Endergebnis:

```
In[*]:= Re[f[x + I y]] // ComplexExpand
```

```
Out[*]:= -e-x y Cos[y] + e-x x Sin[y]
```

und das stimmt tatsächlich mit der Angabe überein.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.16

Finden Sie die Laurentreihen (um $z=0$) für die folgenden Funktionen, und zwar jeweils in allen möglichen Konvergenzgebieten:

(a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$

(b) $f(z) = \exp(z^2) / z^2$

(c) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$

Lösungsweg

(a)

Wir formen zuerst so um (*Mathematica*-Befehl `Apart` oder Partialbruchzerlegung oder Übung), dass wir eine Summe von Poltermen erhalten:

$$\text{In}[*]:= \text{Apart}\left[\frac{1}{z(z-1)}\right]$$

$$\text{Out}[*]= \frac{1}{-1+z} - \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Wegen des Pole bei $z=0$ und $z=1$ gibt es zwei Konvergenzgebiete:

$$(1) 0 < |z| < 1$$

$$(2) 1 < |z|$$

Im Gebiet (1) gibt der 1. Polterm die negativen Potenzen und der 2. Term die Taylorreihe:

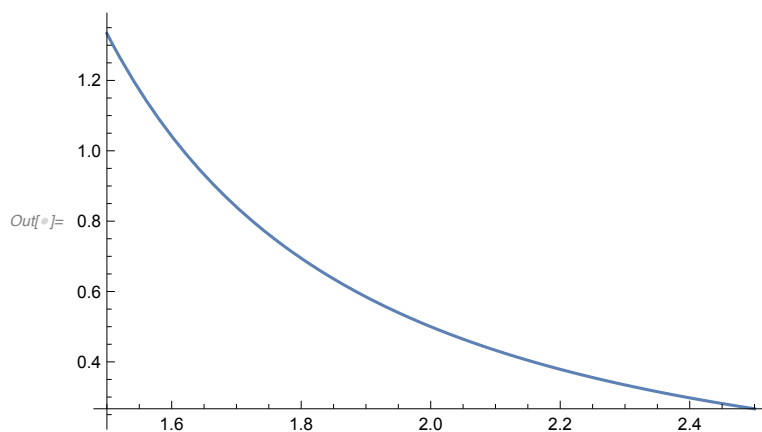
$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Im Gebiet (2) tragen beide Polterme zu den negativen Potenzen bei. Der erste hat schon die richtige Form, der zweite wird geeignet entwickelt:

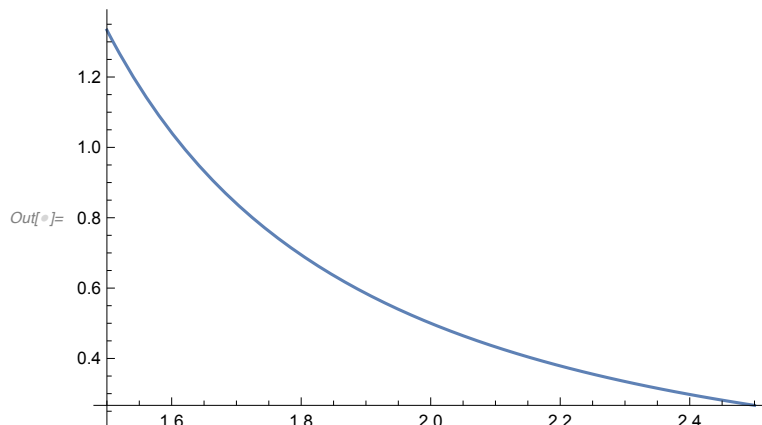
$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Wir wollen die Konvergenz numerisch überprüfen und vergleichen dazu für $1.5 < x < 2.5$ die Werte der Reihe mit denen der Funktion.

$$\text{In}[*]:= \text{Plot}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \{z, 1.5, 2.5\}\right]$$



```
In[ ]:= Plot[- 1/z + 1/(z-1), {z, 1.5, 2.5}]
```



Das stimmt natürlich nur deswegen so gut überein, da Mathematica die unendlich Reihe summiert hat und daher vermutlich die Funktion "rekonstruiert" hat.

Wir versuchen, darauf zu kommen, ob das tatsächlich so geht:

```
In[ ]:= Sum[ (1/z)^n, {n, 2, Infinity}]
```

```
Out[ ]:= 1/((-1+z) z)
```

Ganz schlau, nicht?

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(b)

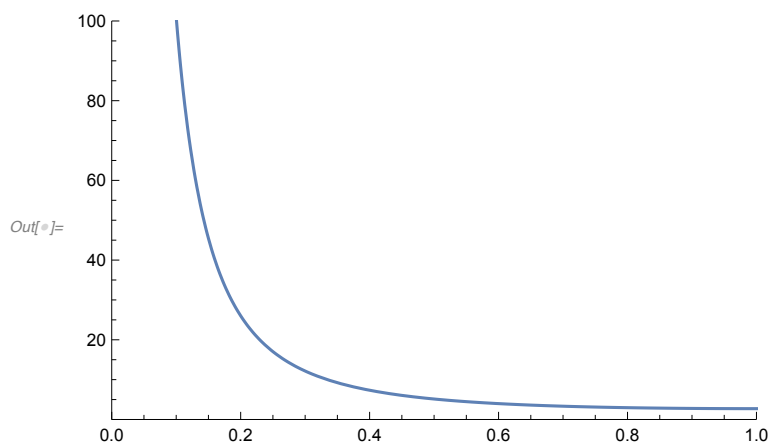
Diese Funktion hat einen Pol 2. Ordnung bei $z=0$. Wir sehen das am besten durch die Taylorreihe für $\exp(z^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(z^2)}{z^2} &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-2}}{n!} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

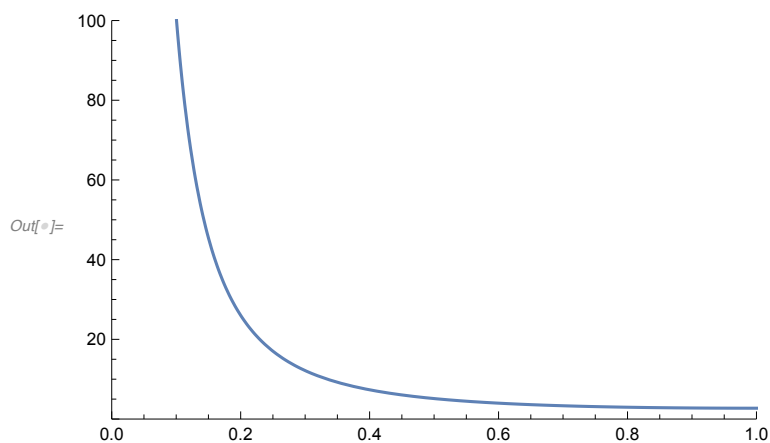
und das ist auch schon das Ergebnis im Konvergenzgebiet $0 < |z|$.

Wir wollen die Konvergenz numerisch überprüfen und vergleichen dazu für $0.1 < x < 1$ die Werte der Partialsumme (bis $n=5$) mit denen der Funktion.

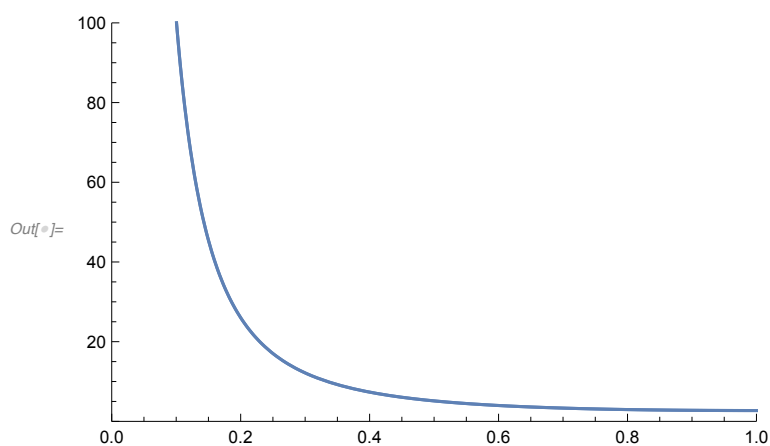
```
In[ ]:= PR = Plot[ $\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^5 \frac{z^{2n}}{(n+1)!}$ , {z, 0.1, 1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 100}}]
```



```
In[ ]:= PF = Plot[E^(z^2)/z^2, {z, 0.1, 1}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 100}}]
```



```
In[ ]:= Show[PF, PR]
```



Die Partialsumme (bis n=5) stimmt also perfekt mit der Funktion überein.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

(c)

Wir formen zuerst so um (Partialbruchzerlegung oder Übung), dass wir eine Summe von Poltermen erhalten:

```
In[ ]:= Apart[ $\frac{1}{z^2 (z - 2)}$ ]
```

```
Out[ ]:=  $\frac{1}{4 (-2 + z)} - \frac{1}{2 z^2} - \frac{1}{4 z}$ 
```

Ab hier kann man analog zu (a) vorgehen.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.18

Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale:

- (a) $P \int_0^{\infty} dx \frac{x^4}{x^6 - 1}$
 (b) $\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{-5 + 4 \cos \varphi}$
 (c) $\int_0^{\infty} dx \frac{\cos x}{x^2 + 4}$
 (d) $\int_0^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$

Lösungsweg

(a)

Wegen der Symmetrie des Integranden kann man das Integral auch als

$$\frac{1}{2} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^4}{x^6 - 1}$$

anschreiben. Wir schließen die Kontur in der oberen Halbebene. Die Nullstellen des Nenners sind die Polpositionen:

```
In[ ]:= Do[Print["Polposition ", i, " = ", Root[x^6 - 1, i]], {i, 1, 6}]
```

```
Polposition 1 = -1
```

```
Polposition 2 = 1
```

```
Polposition 3 =  $\frac{1}{2} (-1 - i \sqrt{3})$ 
```

```
Polposition 4 =  $\frac{1}{2} (-1 + i \sqrt{3})$ 
```

```
Polposition 5 =  $\frac{1}{2} (1 - i \sqrt{3})$ 
```

```
Polposition 6 =  $\frac{1}{2} (1 + i \sqrt{3})$ 
```

Die jeweiligen Residuen sind

```
In[ ]:= Do[Print["Residuum ", i, " = ",  
Residue[(1/2) x^4 / (x^6 - 1), {x, Root[x^6 - 1, i]}]], {i, 1, 6}]
```

$$\text{Residuum 1} = -\frac{1}{12}$$

$$\text{Residuum 2} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Residuum 3} = \frac{i}{6(-i + \sqrt{3})}$$

$$\text{Residuum 4} = -\frac{i}{6(i + \sqrt{3})}$$

$$\text{Residuum 5} = \frac{i}{6(i + \sqrt{3})}$$

$$\text{Residuum 6} = -\frac{i}{6(-i + \sqrt{3})}$$

Die beiden ersten Pole liegen auf der Kontur, daher handelt es sich auch um ein Hauptwertintegral. Wir nehmen jeweils den halben Residuumsbeitrag, diese Beiträge heben sich allerdings auf. Zwei weitere Pole (Nummer 4 und 6) liegen in der oberen Halbebene und tragen nach dem Residuensatz zum Integral bei.

$$\text{In[*]:= 2 Pi I Simplify}\left[\frac{1}{6 + 6 I \sqrt{3}} - \frac{I}{6(I + \sqrt{3})}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Das ist auch das Endergebnis. Wir kontrollieren mit Hilfe von Mathematica:

$$\text{In[*]:= Integrate}\left[x^4 / (x^6 - 1), \{x, 0, \text{Infinity}\}, \text{PrincipalValue} \rightarrow \text{True}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Jetzt sind wir zufrieden mit unserer Integrationskunst!

(b)

Das Integral

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{-5 + 4 \cos \varphi}$$

kann in ein Integral entlang des Einheitskreises C umgeschrieben werden. Wir ersetzen

$$\cos \varphi \rightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right) / 2$$

mit $z = \exp(i\varphi)$. Das Integral wird

$$\int_C d\varphi \frac{1}{-5 + 2z + 2/z} = \int_C d\varphi \frac{z}{-5z + 2z^2 + 2} = \frac{-i}{2} \int_C dz \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

wobei wir $dz = iz d\varphi$ verwendet haben. Der Integrand hat zwei Pole,

$$\text{In[*]:= Solve}\left[z^2 - \frac{5}{2}z + 1 == 0, z\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \left\{\left\{z \rightarrow \frac{1}{2}\right\}, \left\{z \rightarrow 2\right\}\right\}$$

von denen aber nur der erste (bei $z = \frac{1}{2}$) im Einheitskreis C liegt. Sein Residuum ist

$$\text{In[*]:= Res = Limit}\left[\frac{-\mathbf{I}}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) / \left(z^2 - \frac{5}{2}z + 1\right), z \rightarrow \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{\mathbf{i}}{3}$$

und das Integral nach dem Residuum-Satz daher

$$\text{In[*]:= Ergebnis} = 2 \pi \mathbf{I} \text{ Res}$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{2 \pi}{3}$$

Zur Kontrolle verwenden wir die *Mathematica*-Funktion `Integrate`:

$$\text{In[*]:= Integrate}\left[\frac{1}{-5 + 4 \text{Cos}[\varphi]}, \{\varphi, 0, 2 \pi\}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{2 \pi}{3}$$

und es stimmt mit unserer Rechnung überein!

(c)

Der Integrand ist eine gerade Funktion und daher können wir zum einen das Integrationsgebiet verdoppeln und zum anderen auf ein Fourierintegral erweitern:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx \frac{\cos x}{x^2 + 4} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x + \mathbf{i} \sin x}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{\mathbf{i}x}}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

(Der Sinus-Beitrag verschwindet wegen seiner Antisymmetrie-Eigenschaft!) Das Fourierintegral kann zur einer halbkreisförmigen Kontur über die obere Halbebene erweitert werden. Der Integrand hat dort einen Pol bei $z=2\mathbf{i}$ mit dem Residuum

$$\text{In[*]:= Residue}\left[\frac{1}{2} \frac{e^{\mathbf{I} z}}{z^2 + 4}, \{z, 2 \mathbf{I}\}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{\mathbf{i}}{8 e^2}$$

und das Integral hat daher den Wert

$$\text{In[*]:= } 2 \pi \mathbf{I} \text{ Residue}\left[\frac{1}{2} \frac{e^{\mathbf{I} z}}{z^2 + 4}, \{z, 2 \mathbf{I}\}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{\pi}{4 e^2}$$

(d)

Dieses Integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

verwirrt zunächst. Da der Integrand eine gerade Funktion ist, können wir umschreiben:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Wenn wir es in die komplexe Ebene erweitern, hat der Integrand Verzweigungspunkte und Pole bei $z=+i, -i$! Die Lösung besteht in einer Trennung des Integranden:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x + i)}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\ln(x - i)}{x^2 + 1}$$

Nun berechnen wir die beiden Teile getrennt. Die Kontur erweitern wir zu einem Halbkreis, der jeweils in der Halbebene geschlossen wird, in der sich kein Verzweigungspunkt befindet. Den Schnitt denken wir uns also jeweils in die andere Richtung gelegt. Damit trägt jeweils nur das Residuum des Poles in der entsprechenden Halbebene bei. Beim ersten Integral umläuft die Kontur die obere Halbebene in positiver Richtung:

$$\frac{1}{2} \int_C dz \frac{\ln(z + i)}{(z - i)(z + i)}$$

und das Residuum am Pol bei $z=i$ ist

$$\text{In[*]:= Res} = \frac{\text{Ln}[2 \text{ I}]}{4 \text{ I}}$$

$$\text{Out[*]:=} -\frac{1}{4} \text{ i Ln}[2 \text{ i}]$$

und das Integral daher $\frac{\pi}{2} \ln 2$

$$\text{In[*]:= I1} = 2 \pi \text{ I Res}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{1}{2} \pi \text{ Ln}[2 \text{ i}]$$

Das zweite Integral wird in der unteren Halbebene im negativen Umlaufsinn geschlossen. Das Residuum ist

$$\text{In[*]:= Res} = -\frac{\text{Ln}[-2 \text{ I}]}{4 \text{ I}}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{1}{4} \text{ i Ln}[-2 \text{ i}]$$

und das Integral daher

$$\text{In[*]:= I2} = -2 \pi \text{ I Res}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{1}{2} \pi \text{ Ln}[-2 \text{ i}]$$

Die Summe der beiden Beiträge ist

$$\text{In[*]:= Simplify[I1 + I2]}$$

$$\text{Out[*]:=} \frac{1}{2} \pi (\text{Ln}[-2 \text{ i}] + \text{Ln}[2 \text{ i}])$$

und bei Berücksichtigung von

$$\text{Ln}[-2 \text{ I}] + \text{Ln}[2 \text{ I}] = \text{Ln}[-4 \text{ I}^2] = \text{Ln} 4 = 2 \text{ Ln} 2$$

ergibt sich das Endergebnis zu $\pi \text{ Ln}[2]$.

Wiederum berechnen wir - zur Kontrolle - das Integral mittels der Mathematica Funktion:

```
In[*]:= Simplify[Integrate[Log[x^2 + 1] / (x^2 + 1), {x, 0, Infinity}]]
```

```
Out[*]:=  $\pi \log[2]$ 
```

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

19.19

Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

Lösungsweg

Das Integral

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

fällt zwar nur schwach gegen unendlich ab, existiert aber wegen des oszillierenden Terms (vgl. Fouriertransformation und Riemann-Lebesgue-Lemma).

Die Mathematica-Integration liefert sofort

```
In[*]:= Integrate[Sin[x]/Sqrt[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
Out[*]:=  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 
```

- aber wie ist das gerechnet worden?

Der Integrand hat einen Verzweigungspunkt bei $z=0$. Das Integral kann durch Aufteilung des Sinus in eine Summe von zwei Fouriertransformationen umgeschrieben werden:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{2i\sqrt{x}} - \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-ix}}{2i\sqrt{x}}$$

Das Abfallverhalten ist für die Fouriertransformation ausreichend.

Mit der Transformation $x \rightarrow t^2$ schreiben wir das erste Integral um und erhalten

$$\int_0^{\infty} dt \, 2t \frac{e^{it^2}}{2i\sqrt{t^2}} = -i \int_0^{\infty} dt \, e^{it^2}$$

Wir betrachten den Integranden im ersten Oktanten ($t = R e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$),

$$e^{it^2} = e^{iR^2 \cos(2\varphi) - R^2 \sin(2\varphi)}$$

Wegen der Positivität des $\sin(2\varphi)$ fällt der Integrand im Unendlichen in diesem Gebiet schnell genug ab, dass wir die Integrationskontur verformen können und die Integration entlang $\varphi=0$ auch entlang $\varphi=\pi/4$ durchführen können also

$$t = R(1+i)/\sqrt{2}, \quad it^2 = -R^2, \quad dt = dR(1+i)/\sqrt{2}$$

$$-i \int_0^{\infty} dt \, e^{it^2} = -i(1+i)/\sqrt{2} \int_0^{\infty} dR \, e^{-R^2}$$

Das Gauß - Integral ist bekannt;

es ergibt den Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Insgesamt liefert das Integral daher den Wert $(1 - i) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Die Argumentation für das zweite Integral verläuft ähnlich, nur dass wir dort die Integrationskontur entlang $\varphi = -\pi/4$ verformen:

$$- \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-ix}}{2i\sqrt{x}} = (1 + i) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Dieses Ergebnis ergibt sich auch daraus, dass es sich ja um das komplex konjugierte erste Integral handelt. Die Summe der beiden Integrale ergibt das gesuchte Endergebnis $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```