

Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 20. Gruppen

20.1

Zeigen Sie, dass komplexe, unitäre 2×2 -Matrizen mit Determinante 1 (vgl. 20.5) eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bilden!

Lösungsweg

(a) Abschluss

Unitarität bedeutet

$$A A^+ = 1.$$

Für ein Produkt von zwei unitären Matrizen $C=AB$ gilt damit

$$C C^+ = (AB) (AB)^+ = A B B^+ A^+ = A 1 A^+ = 1$$

Wenn $\det(A)=1$ und $\det(B)=1$ dann gilt bekanntlich auch $\det(AB)=\det(A) \det(B)=1$.

(b) Assoziativität

Für alle quadratischen Matrizen gilt

$$(AB) C = A (BC)$$

(c) Einheitselement

..ist die 2×2 Einheitsmatrix

(d) Inverses Element

..von A ist für unitäre Matrizen A^+ .

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.2

Bilden die Elemente der Menge $\{0,1,2,3\}$ eine Gruppe bezüglich der Gruppenoperation

(a) $a \circ b \equiv (a \cdot b) \pmod{4}$?

(b) $a \circ b \equiv (a+2b) \pmod{4}$?

Konstruieren Sie die Gruppentafel, und überprüfen Sie alle vier geforderten Eigenschaften!

Lösungsweg

(a)

```
In[*]:= Mul[a_, b_] := Mod[a b, 4];
```

```
In[*]:= GroupSet = {0, 1, 2, 3}
```

```
Out[*]:= {0, 1, 2, 3}
```

Die Gruppeneigenschaften sind nicht erfüllt:

(1) Abschluss

```
In[*]:= GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
      {i, 1, Length[GroupSet]}, {j, 1, Length[GroupSet]}], 1]]
```

```
Out[*]:= {0, 1, 2, 3}
```

Das ist also in Ordnung.

(2) Assoziativität

Man muss zeigen:

$$((a \cdot b) \pmod{4} \cdot c) \pmod{4} = (a \cdot (bc) \pmod{4}) \pmod{4}$$

Linke Seite: Sei

$$(a \cdot b) \pmod{4} = a \cdot b - 4n \quad (\text{mit } n = 0 \text{ oder } 1)$$

dann ist

$$((a \cdot b) \pmod{4} \cdot c) = a \cdot b \cdot c - 4n \cdot c$$

und

$$((a \cdot b) \pmod{4} \cdot c) \pmod{4} = a \cdot b \cdot c \pmod{4}.$$

Rechte Seite: Sei

$$(b \cdot c) \pmod{4} = b \cdot c - 4m \quad (\text{mit } m = 0 \text{ oder } 1)$$

dann ist

$$a \cdot (b \cdot c) \pmod{4} = a \cdot b \cdot c - 4m \cdot a$$

und daher

$$(a \cdot (b \cdot c) \pmod{4}) \pmod{4} = a \cdot b \cdot c \pmod{4}.$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein.

(3) Einheitselement

...ist die 1

(4) Inverses Element

.da muss sich jeweils 1 ergeben. Also:

$$(1 \cdot 1) \bmod 4 = 1$$

$$(2 \cdot ?) \bmod 4 = 1$$

$$(3 \cdot ?) \bmod 4 = 1$$

$$(4 \cdot ?) \bmod 4 = 1$$

Die inversen Elemente fehlen also!

Anmerkung:

Wie sieht das für

$$a \circ b \equiv (a + b) \bmod 4$$

aus ?

Wie lautet die Gruppentafel?

(Es ist dieselbe wie die der Z_4 (die ja isomorph dazu ist) und in Tabelle (20.1) angegeben.)

(b)

```
In[*]:= Mul[a_, b_] := Mod[a + 2 b, 4];
```

```
In[*]:= GroupSet = {0, 1, 2, 3}
```

```
Out[*]:= {0, 1, 2, 3}
```

Sind die Gruppeneigenschaften erfüllt?

(1) Abschluss

```
In[*]:= GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
      {i, 1, Length[GroupSet]}, {j, 1, Length[GroupSet]}], 1]]
```

```
Out[*]:= {0, 1, 2, 3}
```

Das ist ok.

(2) Assoziativität

Man muss zeigen:

$$((a + 2b) \bmod 4) + 2c \bmod 4 = (a + 2((b + 2c) \bmod 4)) \bmod 4$$

Linke Seite: Sei

$$(a + 2b) \bmod 4 = a + 2b - 4n \quad (\text{mit } n = 0 \text{ oder } 1)$$

dann ist

$$((a + 2b) \bmod 4) + 2c = a + 2b + 2c - 4n$$

und

$$((a + 2b) \bmod 4) + 2c \bmod 4 = (a + 2b + 2c) \bmod 4.$$

Rechte Seite: Sei

$$(b + 2c) \bmod 4 = b + 2c - 4m \quad (\text{mit } m = 0 \text{ oder } 1)$$

dann ist

$$a + 2 \cdot ((b + 2c) \bmod 4) = a + b + 2c - 4m \quad (\text{mit } m = 0 \text{ oder } 1)$$

und daher

$$(a + 2 \cdot ((b + 2c) \bmod 4)) \bmod 4 = (a + b + 2c) \bmod 4.$$

Die beiden Ergebnisse stimmen nicht überein, da ja nicht immer

$$b \bmod 4 = 2b \bmod 4$$

gilt.

Das ist keine Gruppe!

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.3

Wieviele Elemente hat die zyklische Untergruppe der S_3 ? Finden Sie eine Matrixdarstellung dieser Elemente!

Lösungsweg

Die Gruppe hat 6 Elemente:

$$\{123 \rightarrow 123, 123 \rightarrow 231, 123 \rightarrow 312, 123 \rightarrow 213, 123 \rightarrow 132, 123 \rightarrow 321\}$$

Die zyklische Untergruppe ist die Menge der geraden Permutationen

$$H = \{123 \rightarrow 123, 123 \rightarrow 231, 123 \rightarrow 312\}.$$

Diese Gruppe ist isomorph zu Z_3 . Die Gruppentafel hat die Form

. 1 a b

1 1 a b

a a b 1

b b 1 a

Eine Darstellung mit Hilfe von 3×3 Matrizen permutiert einfach die drei Elemente.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.4

Diskutieren Sie Untergruppen der Permutationsgruppe S_3 und deren Nebenklassen.

Lösungsweg

Die Gruppe hat 6 Elemente:

$$\{123 \rightarrow 123, 123 \rightarrow 231, 123 \rightarrow 312, 123 \rightarrow 213, 123 \rightarrow 132, 123 \rightarrow 321\}$$

Eine Untergruppe ist die Menge der geraden Permutationen

$$H = \{123 \rightarrow 123, 123 \rightarrow 231, 123 \rightarrow 312\},$$

das ist hier auch

die Menge der zyklischen Permutationen. Die ungerade Permutationen bilden keine Gruppe (kein

Einheitselement!).

Die Gruppe kann in zwei Nebenklassen aufgeteilt werden:

H

und

H (123→213) das ist also {123→213, 123→132, 123→321}.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.5

Zeigen Sie, dass Z_4 nicht der Produktgruppe $Z_2 \times Z_2$ isomorph ist!

Lösungsweg

Wir konstruieren die Gruppentafel für die Z_4 . Dabei kann man die 4 Elemente (1,a,b,c) und die Gruppenkomposition zum Beispiel auf die nachfolgenden Arten darstellen:

(a) durch (1,i,-1,-i) und Multiplikation

(b) durch (0,1,2,3) und Addition modulo 4

Die Gruppentafel ist im Text angegeben und hat die Form:

```
. 1 a b c
1 × 1 a b c
a a b c 1
b b c 1 a
c c 1 a b
```

Die $Z_2 \times Z_2$ kann durch Paare (x, y) dargestellt werden, wobei die Gruppenmultiplikation zum Beispiel die Form

$$(x, y) \circ (u, v) = (x \circ u, y \circ v)$$

hat. Wir wählen für die Darstellung der Z_2 die Elemente

0 und 1 und als Gruppenoperation die Addition modulo 2.

Die Produktgruppe hat damit die Elemente

```
1 entspricht (0, 0)
a entspricht (1, 0)
b entspricht (0, 1)
c entspricht (1, 1)
```

und die Gruppentafel wird damit

```
. 1 a b c
1 × 1 a b c
a a 1 c b
b b c 1 a
c c b a 1
```

Es gibt keine Permutation der Bezeichnungen, die die beiden Gruppentafeln zur Übereinstimmung

bringen kann. Die Tafel ist symmetrisch: es handelt sich um eine abelsche Gruppe.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.6

Demonstrieren Sie Cayleys Theorem anhand der Gruppe D_3 der Drehungen und Spiegelungen eines gleichseitigen Dreiecks (6 Elemente).

Lösungsweg

Laut Cayleys Theorem ist jede endliche Gruppe der Ordnung n isomorph zu einer Untergruppe der S_n . Eigentlich wissen wir ja schon, dass die D_3 (6 Elemente) isomorph zur S_3 (ebenfalls 6 Elemente) ist. Diese aber ist eine Untergruppe der S_6 .

Die formale Gleichwertigkeit mit der S_6 wird aus der Gruppentafel der D_3 gezeigt. Diese ist in Tabelle (20.1) angegeben. Wenn wir die Gruppenelemente $e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ durch die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ symbolisieren, so lautet die Gruppentafel:

```
In[ ]:= MatrixForm[{{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {2, 3, 1, 6, 4, 5}, {3, 1, 2, 5, 6, 4},
{4, 5, 6, 1, 2, 3}, {5, 6, 4, 3, 1, 2}, {6, 4, 5, 2, 3, 1}}]
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Spalte entspricht einer Permutation der 6 Zahlen und daher einem Element der S_6 . Diese können wir durch 6x6 Matrizen darstellen. Die erste Spalte entspricht der 6x6 Einheitsmatrix, die zweite der Matrix

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}}]
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und so weiter. Schon aus der Gruppentafel sehen wir aber eine Blockstruktur, die sich nun wieder offenbart. Die 6 Darstellungsmatrizen sind

```
In[ ]:= MatrixForm[{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}]
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}}]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}}]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 1, 0},
{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}}]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1},
{0, 1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}}]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[{{0, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0},
{0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 0}}]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.7

Finden Sie eine Matrixdarstellung für die Gruppen S_2 und S_3 . Was sind die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen?

Lösungsweg

(a) S_2

Die S_2 ist die Permutationsgruppe von zwei Elementen:

$12 \rightarrow 12, 12 \rightarrow 21$

und kann daher durch 2x2 Matrizen dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir versuchen, die beiden Elemente simultan auf Diagonalform zu bringen (beim ersten Element ist das trivial).

In[*]:= **Eigensystem** [$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]

Out[*]:= $\{\{-1, 1\}, \{-1, 1\}, \{1, 1\}\}$

Die Eigenvektoren werden normiert und liefern die Spalten der Diagonalisierungsmatrix U:

In[*]:= $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$

Out[*]:= $\{\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$

In[*]:= **Udag = Conjugate**[**Transpose**[U]]

Out[*]:= $\{\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}\}$

In[*]:= $\mathbf{U} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Udag}$

Out[*]:= $\{\{-1, 0\}, \{0, 1\}\}$

Damit faktorisiert die Darstellung in zwei irreduzible 1-dimensionale Darstellungen (entsprechend dem Burnside Theorem: $1+1=2$). Die erste hat die Elemente (1, -1) und ist nichttrivial. Die zweite ist trivial mit den Elementen (1,1).

(b) S_3

Die S_3 ist die Permutationsgruppe von drei Elementen:

$123 \rightarrow 123, 123 \rightarrow 231, 123 \rightarrow 312, 123 \rightarrow 213, 123 \rightarrow 132, 123 \rightarrow 321,$

und kann daher auch durch 3x3 Matrizen dargestellt werden, die eben diese Permutationen der Komponenten eines 6-Vektors erzeugen:

In[*]:= $\mathbf{Gr} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\};$

Überzeugen wir uns durch Gruppenmultiplikation:

In[*]:= **Do**[**Print**[**Gr**[**i**]] . {1, 2, 3}], {i, 1, 6}]

{1, 2, 3}

{2, 3, 1}

{3, 1, 2}

{2, 1, 3}

{1, 3, 2}

{3, 2, 1}

Die Gruppe ist isomorph zur D_3 (man identifiziert die Ecken eines Dreiecks mit den Zahlen 1,2,3). Diese wird durch Drehungen und Spiegelungen in der Ebene dargestellt. Es müssten also 2x2 Matrizen ausreichen, diese Operationen zu beschreiben

Formalen Zugang: Wir versuchen nur eine simultane Diagonalisierung der Matrizen:

```
In[*]:= ES = Eigensystem [  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ]
```

```
Out[*]:= { {1,  $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$  },  
           { {1, 1, 1}, {  $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ , 1 }, {  $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ , 1 } } }
```

Wir konstruieren aus den Eigenvektoren die unitäre Matrix U, welche diese Matrix diagonalisiert:

```
In[*]:= U1 = ES[[2, 1]] / Norm[ES[[2, 1]]];
```

```
U2 = ES[[2, 2]] / Norm[ES[[2, 2]]];
```

```
U3 = ES[[2, 3]] / Norm[ES[[2, 3]]];
```

```
In[*]:= U = {U1, U2, U3};
```

```
In[*]:= Simplify[U.Transpose[Conjugate[U]]]
```

```
Out[*]:= { {1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1} }
```

```
In[*]:= Simplify[U.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  .Transpose[Conjugate[U]]]
```

```
Out[*]:= { {1, 0, 0}, {0,  $-\frac{1}{2}i(-i + \sqrt{3})$ , 0 }, {0, 0,  $\frac{1}{2}i(i + \sqrt{3})$  } }
```

```
In[*]:= Gr[[1]]
```

```
Out[*]:= { {1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1} }
```

```
In[*]:= Do[Print[MatrixForm[Expand[Simplify[U.Gr[[i]].Transpose[Conjugate[U]]]]],  
           {i, 1, Length[Gr]}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Wie sehen, dass die Darstellung in eine 2-dimensionale (oberer Block) und die (triviale) eindimensionale Darstellung faktorisiert. Wir können also folgende irreduzible 2-dimensionale Darstellung für die 6 Elemente der Gruppe anschreiben:

$$\text{In}[*]:= \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{In}[*]:= \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Daneben gibt es noch zwei eindimensionale Darstellungen (Burnside's Theorem: $1+1+2^2=6$). Eine ist die triviale:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1$$

und eine unterscheidet zwischen den geraden und den ungeraden Permutationen:

1, 1, 1, -1, -1, -1.

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

20.8

Finden Sie die reguläre Matrixdarstellung für die Gruppe Z_3 .

Lösungsweg

Die Gruppentafel hat die Form

```
. 1 a b
1 × 1 a b
a a b 1
b b 1 a
```

Es ist

$$t_{111} = 1, \quad t_{122} = 1, \quad t_{133} = 1$$

$$t_{212} = 1, \quad t_{223} = 1, \quad t_{231} = 1$$

$$t_{313} = 1, \quad t_{321} = 1, \quad t_{332} = 1$$

und alle anderen t sind 0. Damit ist

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das ist die reguläre Darstellung. Versuchen Sie einfach, daraus die Gruppentafel zu bestimmen. Sie muss mit der obigen übereinstimmen!

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

20.9

Finden Sie eine 3x3 Matrixdarstellung für die Würfelgruppe; diskutieren Sie Untergruppe, Nebenklassen und Coset.

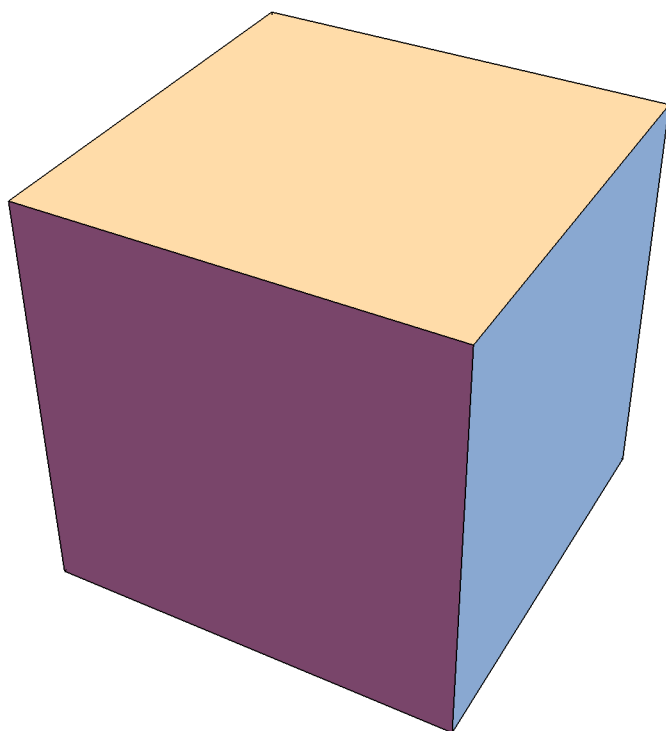
Lösungsweg

Konstruktion aller Gruppenelemente

Die Würfelgruppe, auch kubische Gruppe genannt, ist die Invarianzgruppe der Drehungen eines Würfels.

```
In[ ]:= Show[Graphics3D[Cuboid[{0, 0, 0}], Boxed → False]]
```

```
Out[ ]:=
```



Die Symmetriegruppe des Würfels wird aus Drehungen um 90 Grad aufgebaut. Man kann die Gruppe aus der Einheitsmatrix und zwei Drehmatrizen (z.B. um die x und z-Achse) konstruieren.

Beachten Sie:

Drehung um 90 Grad um die z-Achse: $y \leftarrow x, x \leftarrow -y$

Drehung um 90 Grad um die x-Achse: $y \leftarrow -z, z \leftarrow y$

```
In[ ]:= e = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[e]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vierteldrehung um die z-Achse:

```
In[ ]:= a = {{0, -1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[a]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vierteldrehung um die x-Achse:

```
In[ ]:= b = {{1, 0, 0}, {0, 0, -1}, {0, 1, 0}};
```

```
MatrixForm[b]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= GroupSet = {e, a, b}
```

```
Out[*]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}},
        {{0, -1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}, {{1, 0, 0}, {0, 0, -1}, {0, 1, 0}}
```

Wir definieren die Gruppenmultiplikation als normale Matrixmultiplikation:

```
In[*]:= Mul[a_, b_] := a.b;
```

Nun multiplizieren wir alle Elemente der Menge miteinander.

```
In[*]:= GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
        {i, 1, Length[GroupSet]}, {j, 1, Length[GroupSet]}], 1]]
```

```
Out[*]= {{-1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 1}},
        {{0, -1, 0}, {0, 0, -1}, {1, 0, 0}}, {{0, -1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}},
        {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}, {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, -1}},
        {{1, 0, 0}, {0, 0, -1}, {0, 1, 0}}, {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Dieser Vorgang wird wiederholt, bis keinen neuen Elemente mehr gefunden werden. In unserem Fall (n=24) reichen zwei Wiederholungen.

```
In[*]:= Do[GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],
        {i, 1, Length[GroupSet]}, {j, 1, Length[GroupSet]}], 1]];
Print[Length[GroupSet], {k, 1, 3}]
```

21

24

24

Die Gruppe hat also 24 Elemente:

```
In[*]:= Do[Print[MatrixForm[GroupSet[[i]]]], {i, 1, Length[GroupSet]}]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da wir als erstes Element die Einheit wählen wollen, vertauschen wir noch die Reihenfolge geeignet.

```
In[ ]:= x = GroupSet[[1]];
```

```
GroupSet[[1]] = GroupSet[[24]]; GroupSet[[24]] = x;
```

Untergruppen der kubischen Gruppe und deren Nebenklassen

Dank der geometrischen Interpretation der Gruppe ist es nicht schwer, die Untergruppen "zu erraten". Dennoch werden wir sie auch mit unserer Matrixdarstellung testen.

Wir benötigen zuerst zwei Unterprogramme, die die linken und rechten Nebenklassen zu einer Untergruppe H konstruieren.

Dazu multiplizieren wir die Untergruppe von rechts (später links) mit allen Elementen der Gruppe und falls sich eine neue Nebenklasse finden, wird sie zur Menge der Nebenklassen hinzugefügt (Mengenvereinigung "Union"). In diesem Fall fügen wir das entsprechende Gruppenelement zum Coset hinzu.

```
In[*]:= RechteNebenklassen[H_, G_] := Block[{NKR, Coset, LenOld, LenH},
  NKR = {H};
  Coset = {e};
  LenOld = Length[NKR];
  LenH = Length[H];
  Do[NKR = Union[NKR, {Union[Table[Mul[H[[j]], G[[i]]], {j, 1, LenH}]}]];
  If[LenOld ≠ Length[NKR], Coset = Union[Coset, {G[[i]]}];
  LenOld = Length[NKR], {i, 1, Length[G]}];
  Print["Anzahl der rechten Nebenklassen: ", Length[NKR]];
  Print["Coset der rechten Nebenklasse:"];
  Do[Print["H.", MatrixForm[Coset[[i]]]], {i, 1, Length[Coset]}];
  Return[NKR];];
```

```
In[*]:= LinkeNebenklassen[H_, G_] := Block[{NKL, Coset, LenOld, LenH},
  NKL = {H};
  Coset = {e};
  LenOld = Length[NKL];
  LenH = Length[H];
  Do[NKL = Union[NKL, {Union[Table[Mul[G[[i]], H[[j]]], {j, 1, LenH}]}]];
  If[LenOld ≠ Length[NKL], Coset = Union[Coset, {G[[i]]}];
  LenOld = Length[NKL], {i, 1, Length[G]}];
  Print["Anzahl der linken Nebenklassen: ", Length[NKL]];
  Print["Coset der linken Nebenklasse:"];
  Do[Print[MatrixForm[Coset[[i]]], ".H"], {i, 1, Length[Coset]}];
  Return[NKL];];
```

Drehungen um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Flächen, isomorph zu C_4 , 4 Elemente.

```
In[*]:= GroupSet1 = {e, a};
```

```
In[*]:= Do[
  GroupSet1 = Union[GroupSet1, Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]],
    {i, 1, Length[GroupSet1]}, {j, 1, Length[GroupSet1]}, 1]];
  Print[Length[GroupSet1], {k, 1, 3}]
```

3

4

4

```
In[*]:= Do[Print[MatrixForm[GroupSet1[[k]]], {k, 1, Length[GroupSet1]}]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bilden die rechten und linken Nebenklassen dieser Untergruppe (die wir H nennen).

```
In[*]:= RechteNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 6

Coset der rechten Nebenklasse:

$$H \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= LinkeNK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der linken Nebenklassen: 6

Coset der linken Nebenklasse:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$$

Die Coset- Elemente beschreiben die Drehungen einer Seitenfläche in eine der sechs Hauptlagen.

Ist diese Untergruppe ein Normalteiler? Dann müssten die rechten und linken Nebenklassen übereinstimmen:

```
In[ ]:= If[RechteNK == LinkeNK, Print["Das ist ein Normalteiler"],
  Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist kein Normalteiler

Diese Untergruppe hat selbst noch eine C_2 Untergruppe (Halbdrehungen), die wir aber nicht weiter diskutieren.

Drehungen um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier diagonal gegenüberliegenden Kanten, isomorph zu C_2 , 2 Elemente.

```
In[ ]:= GroupSet1 = {e, {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, -1}}};
```

```
In[ ]:= Do[
  GroupSet1 = Union[GroupSet1, Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]],
    {i, 1, Length[GroupSet1]}, {j, 1, Length[GroupSet1]}, 1]];
  Print[Length[GroupSet1], {k, 1, 2}]
```

2

2

```
In[ ]:= Do[Print[MatrixForm[GroupSet1[[k]]], {k, 1, Length[GroupSet1]}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bilden die rechten und linken Nebenklassen dieser Untergruppe.

```
In[ ]:= RechteNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 12

Coset der rechten Nebenklasse:

$$H. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[*]:= LinkenK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];

Anzahl der linken Nebenklassen: 12

Coset der linken Nebenklasse:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$$

Ist diese Untergruppe ein Normalteiler? Dann müssten die rechten und linken Nebenklassen übereinstimmen:

```
In[*]:= If[RechteNK == LinkeNK, Print["Das ist ein Normalteiler"],
  Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist kein Normalteiler

Drehungen um die Raumdiagonale, isomorph zu C_3 , 3 Elemente.

```
In[*]:= GroupSet1 = {e, {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 0, 0}}};
```

```
In[*]:= Do[
  GroupSet1 = Union[GroupSet1, Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]],
    {i, 1, Length[GroupSet1]}, {j, 1, Length[GroupSet1]}, 1]];
  Print[Length[GroupSet1], {k, 1, 2}]
```

3

3

```
In[ ]:= Do[Print[MatrixForm[GroupSet1[[k]]]], {k, 1, Length[GroupSet1]}]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir bilden die rechten und linken Nebenklassen dieser Untergruppe. Dazu multiplizieren wir die Untergruppe von rechts (später links) mit allen Elementen der kubischen Gruppe und falls sich eine neue Nebenklasse finden, wird sie zur Menge der Nebenklassen hinzugefügt (Mengenvereinigung "Union"). In diesem Fall fügen wir das entsprechende Gruppenelement zum Coset hinzu.

```
In[ ]:= RechteNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 8

Coset der rechten Nebenklasse:

$$H. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= LinkeNK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der linken Nebenklassen: 8

Coset der linken Nebenklasse:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$$

Ist diese Untergruppe ein Normalteiler? Dann müssten die rechten und linken Nebenklassen übereinstimmen:

```
In[ ]:= If[RechteNK == LinkeNK, Print["Das ist ein Normalteiler"],
  Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist kein Normalteiler

Die kubische Gruppe hat also genau drei Untergruppen: C_2 , C_3 und C_4 . Keine davon ist ein Normalteiler.

Konjugationsklassen

Wir bilden die Spur der Elemente in Matrixdarstellung, um die Konjugationsklassen zu finden.

```
In[ ]:= Do[Print[Tr[GroupSet[[i]]]], {i, 1, Length[GroupSet]}]
```

3
 -1
 -1
 -1
 -1
 0
 0
 1
 0
 -1
 1
 0
 0
 -1
 1
 0
 1
 0
 0
 -1
 -1
 1
 1
 -1

Neben der Einheit gibt es also noch zumindest (!) drei weitere Konjugationsklassen mit 9, 8 oder 6 Elementen. Wie im Buch besprochen, gibt es tatsächlich 5 Konjugationsklassen mit den Werten $\text{Spur}/\text{Elementanzahl} = 3/1, 1/6, 0/8, -1/6, -1/3$.

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

20.10

Welche Gruppe entspricht den Drehungen um Vielfache von $\pi/2$ und den Spiegelungen ($x \rightarrow -x$) und ($y \rightarrow -y$) in der (x,y) -Ebene? Finden Sie eine Darstellung, Konjugationsklassen und mögliche Untergruppen.

Lösungsweg

Die Drehungen allein sind 4 Elemente entsprechend den Anordnungen:

$(x,y), (y,-x), (-x,-y), (-y,x)$.

Wenn wir nun jedes dieser Elemente allen Spiegelungen $(-,.), (.,-), (-,-)$ unterziehen erhalten wir

(x,y) liefert $(-x,y), (x,-y), (-x,-y)$

$(y,-x)$ liefert $(-y,-x), (y,x), (-y,x)$

$(-x,-y)$ liefert $(x,-y), (-x,y), (x,y)$

$(-y,x)$ liefert $(y,-x), (-y,-x), (y,x)$

Die meisten der Elemente sind nicht neu, nur folgende Elemente kommen zu den ersten vier hinzu:
 $(-x,y), (-y,-x), (x,-y), (y,x)$.

Die Gruppe hat also 8 Elemente. Sie entspricht geometrisch betrachtet den Drehspiegelungen eines Quadrats. Wie bei der D_3 können wir die 2x2 Drehmatrizen als Darstellung wählen und die Spiegelung durch entsprechende Diagonalmatrizen beschreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Zur Konstruktion aller Elemente reicht es, die nachfolgenden drei Elemente zu wählen:

```
In[ ]:= e =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
```

```
a =  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ;
```

```
b =  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
```

```
In[ ]:= GroupSet = {e, a, b}
```

```
Out[ ]:= {{ {1, 0}, {0, 1} }, { {0, 1}, {-1, 0} }, { {-1, 0}, {0, 1} } }
```

Wir definieren die Gruppenmultiplikation als normale Matrixmultiplikation:

```
In[ ]:= Mul[a_, b_] := a.b;
```

Nun multiplizieren wir alle Elemente der Menge miteinander.

Dieser Vorgang wird wiederholt, bis keinen neuen Elemente mehr gefunden werden. In unserem Fall (n=24) reichen zwei Wiederholungen.

```
In[ ]:= Do[GroupSet = Union[GroupSet, Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]],  
  {i, 1, Length[GroupSet]}, {j, 1, Length[GroupSet]}], 1]];  
  Print[Length[GroupSet], {k, 1, 3}]
```

6

8

8

```
In[ ]:= Do[Print[MatrixForm[GroupSet[[i]]], {i, 1, Length[GroupSet]}]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das sind genau die schon angeschriebenen Elemente.

Die Gruppe ist nichtabelsch, da zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\{0, -1\}, \{-1, 0\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$$

Untergruppen

Diese vier Elemente (die Drehungen) sind eine Z_4 Untergruppe:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Weitere Z_2 Untergruppen sind:

$$B_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_5: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nebenklassen (Cosets)

Mit Hilfe einer Untergruppe kann man die Gruppe in Nebenklassen (Cosets) aufteilen.

Untergruppe A:

$A \cdot e$ = wieder die Untergruppe A

$$A \cdot b = A \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt die Elemente

$$\text{In[*]:= MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[*]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{In[*]:= MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[*]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{In[*]:= MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[*]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{In[*]:= MatrixForm}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[*]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können die Gruppe daher auch die beiden rechten Nebenklassen A_e und A_b aufteilen.

Die Nebenklassen zu den anderen zwei-elementigen Untergruppen habe je 2 Elemente. Zum Beispiel ergibt die Untergruppe B_1 folgende vier Nebenklassen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Konjugationsklassen

Zur Ermittlung der Konjugationsklassen bilden wir die Spur der 8 Elemente (die Charaktere) :

$$2, 0, -2, 0, 0, 0, 0, 0$$

Es gibt also zumindest drei Konjugationsklassen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Konjugationsklasse (nur ein Element):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Konjugationsklasse (nur ein Element):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Weitere Konjugationsklassen:

Wir multiplizieren alle Gruppenelemente von links mit einem Element g und von rechts mit $1/g$:

```
In[*]:= Gr = {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {-1, 0}},
  {{-1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{1, 0}, {0, -1}}}
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {-1, 0}},
  {{-1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{1, 0}, {0, -1}}}
```

```
In[*]:= Table[ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {-1, 0}},
  {{1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, 1}}}
```

(2)(4): 1234 5678 wird 1234 8765

```
In[*]:= Table[ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, -1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {-1, 0}},
  {{1, 0}, {0, -1}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, 1}}}
```

(4)(2): 1234 5678 wird 1234 8765

```
In[*]:= KonjGr = Table[ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
  {{-1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{1, 0}, {0, -1}}}
```

(5)(5)1234 5678 wird 1432 5768

```
In[*]:= Table[ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
  {{1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, 1}}}
```

(6)(6)1234 5678 wird 1432 8675

```
In[*]:= Table[ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
  {{1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{-1, 0}, {0, 1}}}
```

(7)(7)1234 5678 wird 1432 8675

```
In[*]:= Table[ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \text{Gr}[[i]] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , {i, 1, 8}]
```

```
Out[*]:= {{ {1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {-1, 0}}, {{-1, 0}, {0, -1}}, {{0, -1}, {1, 0}},
  {{-1, 0}, {0, 1}}, {{0, 1}, {1, 0}}, {{0, -1}, {-1, 0}}, {{1, 0}, {0, -1}}}
```

(8)(8)1234 5678 wird 1432 5768

Wir sehen, dass es drei weitere Konjugationsklassen mit den Elementen

2,4

5,8

6,7

gibt.

Zur Kontrolle konstruieren wir uns noch ein Mathematica Programm, dass uns alle Klassen sucht. Es wird für jedes Element geprüft, welche Elemente in seiner Konjugationsklasse sind.

Zuerst werden für n Elemente n Klassen vorbereitet. Dann wird für jedes $A(j)$ (als U) festgestellt, welche $U A(i) U^{-1}$ einem anderen Gruppenelement entsprechen; das entsprechende Element erhält die Klassennummer von $A(i)$.

```
In[ ]:= FindEle[Ele_, TestSet_] := (kk = 0;
  Do[If[Ele == TestSet[[i]], kk = i, Nil], {i, 1, Length[TestSet]}];
  Return[kk]);

In[ ]:= FindClasses[A_] := Block[{Class, ClassList, Unum, Num, i, j}, Num = Length[A];
  Class = Table[i, {i, 1, Num}];
  Do[Unum = FindEle[A[[j]].A[[i]].Conjugate[Transpose[A[[j]]]], A];
  If[Unum > 0, Class[Unum] = Class[i], {i, 1, Num}, {j, 1, Num}];
  ClassList = Table[0, {i, 1, Num}];
  Do[ClassList[[Class[i]]] = 1, {i, 1, Num}];
  Unum = 1;
  Do[If[ClassList[[i]] == 1, ClassList[[i]] = Unum;
    Unum++], {i, 1, Num}];
  Return[Table[ClassList[[Class[i]]], {i, 1, Num}]]];
```

Wir suchen die Zuordnung der Elemente zu den 5 Klassen:

```
In[ ]:= FindClasses[Gr]
Out[ ]:= {1, 2, 3, 2, 4, 5, 5, 4}
```

Das stimmt mit unserer Zuordnung von weiter oben überein.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.11

Zeigen Sie, dass die dihedrale Gruppe D_3 isomorph zur Permutationsgruppe S_3 ist!

Lösungsweg

Die drei Drehungen entsprechen zyklischen Vertauschungen der Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (123), also den drei geraden Permutationen dieser Zahlen. Die zusätzliche Spiegelung ergibt drei weitere Permutation, nämlich die ungeraden. Zusammen bilden die Permutationen die S_3 (siehe auch Aufgabe 20.6).

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.12

Finden Sie (numerisch) eine 3x3 Matrixdarstellung für die Ikosaedergruppe; diskutieren Sie die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen, Untergruppen, Nebenklassen und Cosets. Gibt es eine Darstellung durch komplexe 2x2 Matrizen?

Lösungsweg

Warnung: Diese Aufgabe wird hier mit MATHEMATICA gelöst; die Rechnung ohne Computer-Unterstützung (die natürlich auch in anderer Form, also zum Beispiel durch numerische Programme, erfolgen kann) ist recht umfangreich. Die Aufgabe ist recht umfangreich!

Der Ikosaeder (20 Dreiecke sind die Grenzflächen) ist dual zum Dodekaeder (12 Fünfecke sind die Grenzflächen): Die Ecken des Dodekaeders sind die Zentren der Dreiecke. Dementsprechend sind die beiden Symmetriegruppen isomorph.

Die Symmetrioperationen sind Drehungen, also eine Untergruppe der $O(3)$. Wir können die entsprechenden Drehmatrizen in 3 Dimensionen konstruieren. Diese 3-dimensionale Darstellung ist zwar reell, aber reduzibel. Die kleinste treue, irreduzible Darstellung benötigt komplexe, unitäre 2×2 Matrizen. Es sind dies Matrizen der $SU(2)$,

Wir beginnen mit der reellen 3×3 Darstellung.

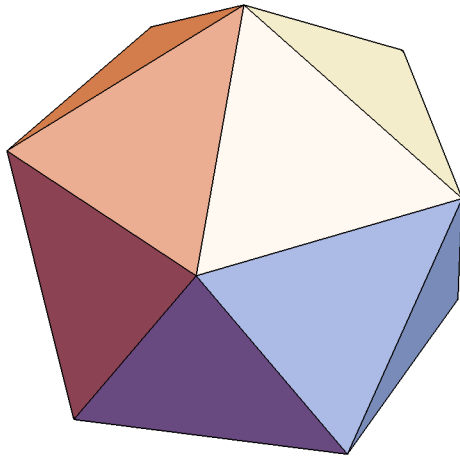
Die Darstellung durch reelle, orthogonale 3×3 Matrizen mit Determinante 1 zu wählen liegt nahe, da diese Gruppe natürlich eine Untergruppe der Drehgruppe in drei Dimensionen $SO(3)$ ist.

Neben dem Einheitselement (Einheitsmatrix) benötigen wir noch zwei Generatoren. Das können die Drehungen um zwei verschiedenen Symmetrieachsen sein. Zur Vorbereitung wollen zuerst den Dodekaeder visualisieren und so die Drehachse bestimmen.

Konstruktion des Dodekaeders

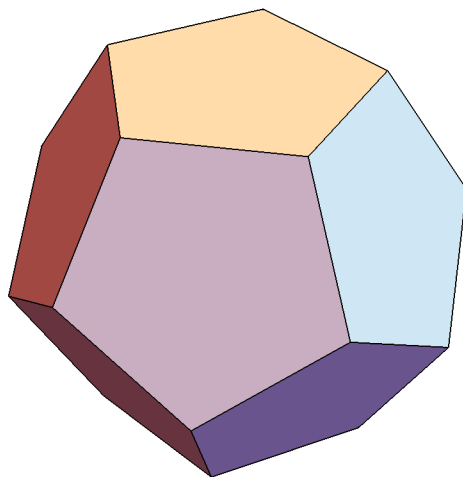
```
In[ ]:= Show[Graphics3D[Icosahedron[] , Boxed → False]]
```

```
Out[ ]:=
```



```
In[ ]:= Show[Graphics3D[Dodecahedron[] , Boxed → False]]
```

```
Out[ ]:=
```



Wir können die entsprechenden Drehmatrizen in 3 Dimensionen konstruieren. Diese 3-dimensionale Darstellung ist zwar reell, aber reduzibel. Die kleinste treue, irreduzible Darstellung benötigt komplexe, unitäre 2x2 Matrizen. Es sind dies Matrizen der $SU(2)$,

Wir beginnen mit der reellen 3x3 Darstellung.

Die Darstellung durch reelle, orthogonale 3x3 Matrizen mit Determinante 1 wählen liegt nahe, da diese Gruppe natürlich eine Untergruppe der Drehgruppe in drei Dimensionen $SO(3)$ ist.

Neben dem Einheitsselement (Einheitsmatrix) benötigen wir noch zwei Generatoren. Das können die Drehungen um zwei verschiedenen Symmetrieachsen sein. Wir wollen annehmen, dass eine Fläche des Dodekahedron (die Kantenlänge können wir frei wählen) in der (xy)-Ebene liegt, die Vertices könnten dann also folgende Koordinaten haben:

In[]:= PolyhedronData["Dodecahedron", "Vertices"]

Out[]:= $\left\{ \left\{ -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, 0, 0.263\ldots \right\}, \left\{ \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, 0, -0.263\ldots \right\}, \right.$
 $\left\{ -0.425\ldots, \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}), 0.263\ldots \right\}, \left\{ -0.425\ldots, \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5}), 0.263\ldots \right\},$
 $\left\{ \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}}, \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), 0.263\ldots \right\}, \left\{ \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}}, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), 0.263\ldots \right\},$
 $\left\{ -0.263\ldots, \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ -0.263\ldots, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}} \right\},$
 $\left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}, -1.11\ldots \right\}, \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}, -1.11\ldots \right\},$
 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}} \right\},$
 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{10}(5 + \sqrt{5})}, 0, -1.11\ldots \right\}, \left\{ -1.11\ldots, \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), -0.263\ldots \right\},$
 $\left\{ -1.11\ldots, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), -0.263\ldots \right\}, \left\{ -0.851\ldots, 0, \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{11}{8\sqrt{5}}} \right\},$
 $\left\{ 0.263\ldots, \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}), -1.11\ldots \right\}, \left\{ 0.263\ldots, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), -1.11\ldots \right\},$
 $\left\{ \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8\sqrt{5}}}, \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{5}), -0.263\ldots \right\}, \left\{ \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8\sqrt{5}}}, \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5}), -0.263\ldots \right\} \}$

```

In[ ]:= Dodekavertices = N[PolyhedronData["Dodecahedron", "Vertices"]]
Out[ ]:= {{-1.37638, 0., 0.262866}, {1.37638, 0., -0.262866},
  {-0.425325, -1.30902, 0.262866}, {-0.425325, 1.30902, 0.262866},
  {1.11352, -0.809017, 0.262866}, {1.11352, 0.809017, 0.262866},
  {-0.262866, -0.809017, 1.11352}, {-0.262866, 0.809017, 1.11352},
  {-0.688191, -0.5, -1.11352}, {-0.688191, 0.5, -1.11352},
  {0.688191, -0.5, 1.11352}, {0.688191, 0.5, 1.11352},
  {0.850651, 0., -1.11352}, {-1.11352, -0.809017, -0.262866},
  {-1.11352, 0.809017, -0.262866}, {-0.850651, 0., 1.11352},
  {0.262866, -0.809017, -1.11352}, {0.262866, 0.809017, -1.11352},
  {0.425325, -1.30902, -0.262866}, {0.425325, 1.30902, -0.262866}}

```

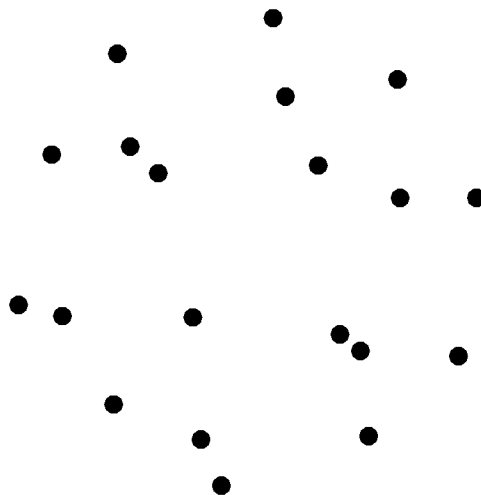
Hier zur Kontrolle nochmals nur die Ecken des Polyeders:

```

In[ ]:= Show[Graphics3D[
  {Table[{AbsolutePointSize[10], Point[Dodekavertices[[i]]}], {i, 1, 20}}],
  Boxed -> False]

```

Out[]:=



Da wir alle Drehungen um den Ursprung ausführen, wollen wir das Zentrum des Dodekahedrons in Ursprungslage bringen.

```

In[ ]:= Zentrum = Sum[Dodekavertices[[i]], {i, 1, 20}] / 20
Out[ ]:= {-1.11022 × 10-17, 0., -6.66134 × 10-17}

```

...also offenbar schon richtig positioniert!

Die Vertices liegen auf der Oberfläche einer Kugel.

```
In[ ]:= Table[Norm[Dodekavertices[[i]]], {i, 1, Length[Dodekavertices]}]
```

```
Out[ ]:= {1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126,
1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126,
1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126, 1.40126}
```

Wir setzen die Punkte auf die Eineitskugel :

```
In[ ]:= rad = Norm[Dodekavertices[[1]]];
```

```
DV = Dodekavertices / rad;
```

```
Dodekavertices = DV;
```

```
In[ ]:= Dodekavertices
```

```
Out[ ]:= {{-0.982247, 0., 0.187592}, {0.982247, 0., -0.187592},
{-0.303531, -0.934172, 0.187592}, {-0.303531, 0.934172, 0.187592},
{0.794654, -0.57735, 0.187592}, {0.794654, 0.57735, 0.187592},
{-0.187592, -0.57735, 0.794654}, {-0.187592, 0.57735, 0.794654},
{-0.491123, -0.356822, -0.794654}, {-0.491123, 0.356822, -0.794654},
{0.491123, -0.356822, 0.794654}, {0.491123, 0.356822, 0.794654},
{0.607062, 0., -0.794654}, {-0.794654, -0.57735, -0.187592},
{-0.794654, 0.57735, -0.187592}, {-0.607062, 0., 0.794654},
{0.187592, -0.57735, -0.794654}, {0.187592, 0.57735, -0.794654},
{0.303531, -0.934172, -0.187592}, {0.303531, 0.934172, -0.187592}}
```

Man kann sich leicht überzeugen, dass alle Kantenlängen (Differenzvektoren zwischen Vertizes) gleich groß sind. Der größte Abstand zwischen zwei (entgegengesetzten) Eckpunkte ist 2.

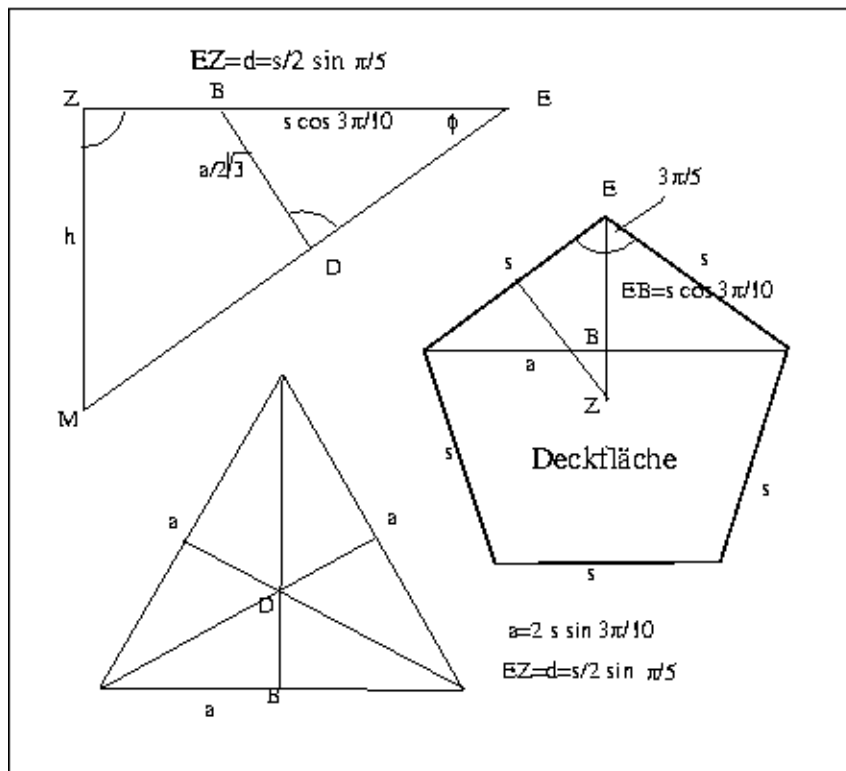
```
In[ ]:= Table[Simplify[Norm[Dodekavertices[[1]] - Dodekavertices[[i]]],
{i, 1, Length[Dodekavertices]}]
```

```
Out[ ]:= {0., 2., 1.1547, 1.1547, 1.86834, 1.86834, 1.1547,
1.1547, 1.1547, 1.1547, 1.63299, 1.63299, 1.86834, 0.713644,
0.713644, 0.713644, 1.63299, 1.63299, 1.63299, 1.63299}
```

```
In[ ]:= Kante = Norm[Dodekavertices[[1]] - Dodekavertices[[16]]]
```

```
Out[ ]:= 0.713644
```

Wir haben hier die Eckkoordinaten von MATHEMATICA übernommen. Wie aber kann man diese Eckpositionen geometrisch konstruieren? Dazu betrachten wir das Dreieck mit den Eckpunkte Dodekaederzentrum M, Mittelpunkt des oben liegenden Pentagons Z und ein Eckpunkt des Pentagons E. Wenn man die folgende Skizze betrachtet und zu verstehen versucht, kann man die wichtigsten Daten ableiten.



Insbesondere ergibt sich

$$\sin \phi =$$

$$\left(a / 2 \sqrt{3} \right) / \left(s \cos \left(3 \pi / 10 \right) \right) = \left(2 s \sin \left(3 \pi / 10 \right) / 2 \sqrt{3} \right) / \left(s \cos \left(3 \pi / 10 \right) \right)$$

$$\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(3 \pi / 10 \right)$$

$$d = \frac{s}{2 \sin \left(\pi / 5 \right)}$$

$$h = d \tan \phi = \frac{s \tan \phi}{2 \sin \left(\pi / 5 \right)}$$

$$\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \left(3 \pi / 10 \right)$$

$$\cos \phi = - \sqrt{1 - \frac{1}{3} \tan^2 \left(3 \pi / 10 \right)}$$

$$\tan \phi = - \sqrt{\frac{\tan^2 \left(3 \pi / 10 \right)}{3 - \tan^2 \left(3 \pi / 10 \right)}}$$

$$\text{In[*]:= TanPhi = Simplify}\left[-\sqrt{\frac{\text{Tan}[3 \pi / 10]^2}{3 - \text{Tan}[3 \pi / 10]^2}}\right]$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(7 + 3 \sqrt{5} \right)}$$

Wir haben die negative Lösung gewählt, damit wir mit der in MATHEMATICA gewählten Raumlage übereinstimmen. Natürlich wäre auch die positive Lösung möglich.

Damit hat der Eckpunkt E beispielsweise die Koordinaten

$$(x, y, z) = (d, 0, h) = \frac{s}{2 \sin(\pi/5)}, 0, \frac{s \tan \phi}{2 \sin(\pi/5)}$$

```
In[ ]:= N[{ $\frac{s}{2 \sin[\pi/5]}$ , 0,  $\frac{s \tan \phi}{2 \sin[\pi/5]}$ } /. s -> Kante]
```

```
Out[ ]:= {0.607062, 0., -0.794654}
```

Das ist Eckpunkt Nummer 20 in der Punkteliste weiter oben.

```
In[ ]:= Dodekavertices[[13]]
```

```
Out[ ]:= {0.607062, 0., -0.794654}
```

Wir benötigen zur Konstruktion einer Gruppenoperation die Drehachsenrichtung, die durch die Verbindung [Mittelpunkt zu Eckpunkt gegeben ist, also den Einheitsvektor, den wir wie folgt bilden:

```
In[ ]:= Drehachse = N[{ $\frac{s}{2 \sin[\pi/5]}$ , 0,  $\frac{s \tan \phi}{2 \sin[\pi/5]}$ } /. s -> Kante];
```

```
Drehachse = Drehachse / Norm[Drehachse]
```

```
Out[ ]:= {0.607062, 0., -0.794654}
```

Konstruktion der drei erzeugenden Elemente

Das Einheitselement benötigen wir auf jeden Fall:

```
In[ ]:= e = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[e]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da wir den Dodekaeder so positionieren können, dass eine Fläche parallel zur x-y-Ebene liegt, kann eine Drehung um die z-Achse um den Winkel $2\pi/5$ durch die folgende orthogonale Matrix dargestellt werden:

```
In[ ]:= a = {{Cos[2 \pi / 5], Sin[2 \pi / 5], 0}, {-Sin[2 \pi / 5], Cos[2 \pi / 5], 0}, {0, 0, 1}};
```

```
MatrixForm[a]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Drehachse geht durch einen Vertex und den Mittelpunkt and wurde weiter oben berechnet:

```
In[ ]:= Drehachse
```

```
Out[ ]:= {0.607062, 0., -0.794654}
```

Der Drehwinkel ist

```
In[ ]:= Drehwinkel = 2 Pi / 3;
```

In Kapitel 10 ist angegeben, wie man eine Drehmatrix durch Angabe von Drehwinkel und Drehachse berechnet. Die Matrixelemente sind durch den Ausdruck

$$r_{ij} = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j) \cos[\varphi] - \epsilon_{ijk} n_k \sin[\varphi]$$

gegeben. In unserem Fall ist die Drehmatrix also

```
In[ ]:= b = Table[Drehachse[[i]] × Drehachse[[j]] +
  (KroneckerDelta[i, j] - Drehachse[[i]] × Drehachse[[j]]) Cos[Drehwinkel] -
  Sum[Signature[{i, j, k}] × Drehachse[[k]], {k, 1, 3}] Sin[Drehwinkel], {i,
    1, 3}, {j, 1, 3}];
MatrixForm[
  b]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
  ( 0.0527864  0.688191 -0.723607 )
  ( -0.688191   -0.5   -0.525731 )
  ( -0.723607  0.525731  0.447214 )
```

Damit haben wir die Startmenge;

```
In[ ]:= GroupSet = N[{e, a, b}];
```

Konstruktion der Gruppe in der reellen 3x3 Darstellung

Die drei erzeugenden Gruppenelemente haben wir bereits berechnet. Die Gruppenoperation lautet

```
In[ ]:= GroupSet = N[{e, a, b}]
```

```
Out[ ]:= {{ {1., 0., 0.}, {0., 1., 0.}, {0., 0., 1.} },
  { {0.309017, 0.951057, 0.}, {-0.951057, 0.309017, 0.}, {0., 0., 1.} },
  { {0.0527864, 0.688191, -0.723607},
    {-0.688191, -0.5, -0.525731}, {-0.723607, 0.525731, 0.447214} } }
```

```
In[ ]:= Mul[a_, b_] := N[a.b];
```

Die Matrixelemente verschiedener Gruppenelemente werden numerisch berechnet und können unter Umständen verschieden aussehen, obwohl sie eigentlich gleich sind. Aus diesem Grund müssen wir die Kontrolle auf "Gleichheit" geeignet modifizieren

```
In[ ]:= Do[GroupSet = Union[GroupSet,
  Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]], {i, 1, Length[GroupSet]},
    {j, 1, Length[GroupSet]}], 1], SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
Print[Length[GroupSet], {k, 1, 4}]
```

7

21

53

60

Wir bekommen 60 Gruppenelemente.

Wir wollen nicht alle 60 Gruppenelemente ausdrucken. Das könnten man mittels des Befehls

```
Do[Print[MatrixForm[GroupSet[[i]]],{i,1,Length[GroupSet]}];
```

erreichen.

Konjugationsklassen

Wir kontrollieren die Klassenanzahl:

```
In[ ]:= ClassChars = {};
Do[t = Tr[GroupSet[[i]]];
  ClassChars = Union[{t}, ClassChars, SameTest -> (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)],
  {i, 1, Length[GroupSet]};
ClassChars

Out[ ]:= {-1., -0.618034, -3.27516 × 10-15, 1.61803, 3.}
```

Es gibt, wie bei der Würfelgruppe, 5 Klassen. In der Ordnung der Charaktere haben sie 15, 12, 20, 12 und 1 Elemente entsprechend :

Kantenmittelpunkte, Drehung um π (15 Elemente)

Flächenmittelpunkt, Drehung um $\pm 4\pi/5$ (12 Elemente)

Eckpunkt, Drehung um $\pm 2\pi/3$ (20 Elemente) ,

Flächenmittelpunkt, Drehung um $\pm 2\pi/5$ (12 Elemente)

Identität, keine Drehung (1Element)

Es gibt also 5 irreduzible Darstellung mit den Dimensionen d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 und nach dem Burnside-Theorem deren Quadratsumme

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 60$$

Für die triviale Darstellung gilt $d_1=1$. Zumindest eine Darstellung (die schon betrachtete) hat Dimension 3. Die einzige möglich Kombination ganzen Zahlen, die das Burnside-Theorem erfüllt ist damit 1,3,3,4,5.

Untergruppen und deren Nebenklassen

Dank der geometrischen Interpretation der Gruppe ist es nicht schwer, die Untergruppen "zu erraten". Dennoch werden wir sie auch mit unserer Matrixdarstellung testen.

Wir benötigen zuerst zwei Unterprogramme, die die linken und rechten Nebenklassen zu einer Untergruppe H konstruieren.

Dazu multiplizieren wir die Untergruppe von rechts (später links) mit allen Elementen der Gruppe und falls sich eine neue Nebenklasse findet, wird sie zur Menge der Nebenklassen hinzugefügt (Mengenvereinigung "Union"). In diesem Fall fügen wir das entsprechende Gruppenelement zum Coset hinzu.

Es gibt allerdings eine Komplikation: Damit *Mathematica* erkennen kann, dass zwei Mengen von Matrizen gleich sind, muss man die Mengen eindeutig sortieren. genau das kann bei den auftretenden numerischen Rundungsfehlern aber schiefgehen und damit scheinbare Ungleichheit bewirken. Wir wenden daher innerhalb der folgenden Routinen einen Trick an: Wir runden alle Matrizen auf 5 signifikante Stellen. Das sollte reichen.

```

In[*]:= RechteNebenklassen[H_, G_] := Block[{NKR, Coset, LenOld, LenH},
  NKR = {Sort[Round[10 000 H]]};
  Coset = {e};
  LenOld = Length[NKR];
  LenH = Length[H];
  Do[NKR = Union[NKR,
    {Union[Sort[Round[10 000 Table[Mul[H[[j]], G[[i]]], {j, 1, LenH}]]],
      SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)]},
    SameTest → (Sum[Norm[#1[[n]] - #2[[n]]], {n, 1, LenH}] < 0.01 &)];
  If[LenOld ≠ Length[NKR], Coset = Union[Coset, {G[[i]]},
    SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
  LenOld = Length[NKR], {i, 1, Length[G]}];
  Print["Anzahl der rechten Nebenklassen: ", Length[Coset]];
  Return[Coset];];

```

```

In[*]:= LinkeNebenklassen[H_, G_] := Block[{NKL, Coset, LenOld, LenH},
  NKL = {Sort[Round[10 000 H]]};
  Coset = {e};
  LenOld = Length[NKL];
  LenH = Length[H];
  Do[NKL = Union[NKL,
    {Union[Sort[Round[10 000 Table[Mul[G[[i]], H[[j]]], {j, 1, LenH}]]],
      SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)]},
    SameTest → (Sum[Norm[#1[[n]] - #2[[n]]], {n, 1, LenH}] < 0.01 &)];
  If[LenOld ≠ Length[NKL], Coset = Union[Coset, {G[[i]]},
    SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
  LenOld = Length[NKL], {i, 1, Length[G]}];
  Print["Anzahl der linken Nebenklassen: ", Length[Coset]];
  Return[Coset];];

```

Drehungen um $2\pi/5$ um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Flächen, isomorph zu C_5 , 5 Elemente.

```

In[*]:= GroupSet1 = N[{e, a}];

```

```

In[*]:= Do[GroupSet1 = Union[GroupSet1,
  Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]], {i, 1, Length[GroupSet1]},
    {j, 1, Length[GroupSet1]}], 1], SameTest → (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
  Print[Length[GroupSet1], {k, 1, 3}]

```

3

5

5

```

In[*]:= CosetRNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];

```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 12

```
In[*]:= Print["Coset der rechten Nebenklasse:"];
Do[Print["H.", MatrixForm[Chop[CosetRNK[[i]]]], {i, 1, Length[CosetRNK]}];
```

Coset der rechten Nebenklasse:

$$H. \begin{pmatrix} -1. & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.947214 & -0.16246 & 0.276393 \\ -0.16246 & -0.5 & -0.850651 \\ 0.276393 & -0.850651 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.947214 & 0.16246 & 0.276393 \\ 0.16246 & -0.5 & 0.850651 \\ 0.276393 & 0.850651 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.861803 & -0.425325 & -0.276393 \\ -0.425325 & 0.309017 & 0.850651 \\ -0.276393 & 0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.861803 & 0.425325 & -0.276393 \\ 0.425325 & 0.309017 & -0.850651 \\ -0.276393 & -0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.67082 & -0.688191 & -0.276393 \\ -0.16246 & 0.5 & -0.850651 \\ 0.723607 & -0.525731 & -0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.67082 & 0.688191 & -0.276393 \\ 0.16246 & 0.5 & 0.850651 \\ 0.723607 & 0.525731 & -0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.638197 & -0.262866 & -0.723607 \\ -0.262866 & -0.809017 & 0.525731 \\ -0.723607 & 0.525731 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.638197 & 0.262866 & -0.723607 \\ 0.262866 & -0.809017 & -0.525731 \\ -0.723607 & -0.525731 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.447214 & 0 & 0.894427 \\ 0 & -1. & 0 \\ 0.894427 & 0 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} -0.361803 & 0.587785 & 0.723607 \\ 0.262866 & 0.809017 & -0.525731 \\ -0.894427 & 0 & -0.447214 \end{pmatrix}$$

$$H. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= CosetLNK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der linken Nebenklassen: 12

```
In[*]:= Print["Coset der linken Nebenklasse:"];
Do[Print[MatrixForm[Chop[CosetLNK[[i]]], ".H"], {i, 1, Length[CosetLNK]}];
```

Coset der linken Nebenklasse:

$$\begin{pmatrix} -1. & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.947214 & -0.16246 & 0.276393 \\ -0.16246 & -0.5 & -0.850651 \\ 0.276393 & -0.850651 & 0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.947214 & 0.16246 & 0.276393 \\ 0.16246 & -0.5 & 0.850651 \\ 0.276393 & 0.850651 & 0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.861803 & -0.425325 & -0.276393 \\ -0.425325 & 0.309017 & 0.850651 \\ -0.276393 & 0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.861803 & 0.425325 & -0.276393 \\ 0.425325 & 0.309017 & -0.850651 \\ -0.276393 & -0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.67082 & 0.16246 & 0.723607 \\ 0.688191 & 0.5 & 0.525731 \\ -0.276393 & 0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.67082 & -0.16246 & 0.723607 \\ -0.688191 & 0.5 & -0.525731 \\ -0.276393 & -0.850651 & -0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.638197 & -0.262866 & -0.723607 \\ -0.262866 & -0.809017 & 0.525731 \\ -0.723607 & 0.525731 & 0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.638197 & 0.262866 & -0.723607 \\ 0.262866 & -0.809017 & -0.525731 \\ -0.723607 & -0.525731 & 0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.447214 & 0 & 0.894427 \\ 0 & -1. & 0 \\ 0.894427 & 0 & 0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} -0.361803 & 0.262866 & -0.894427 \\ 0.587785 & 0.809017 & 0 \\ 0.723607 & -0.525731 & -0.447214 \end{pmatrix} \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot H$$

Die Coset- Elemente beschreiben die Drehungen einer Seitenfläche in eine der sechs Hauptlagen.

Ist diese Untergruppe ein Normalteiler? Dann müssten die rechten und linken Nebenklassen übereinstimmen:

```
In[ ]:= If[Sort[Round[1000 CosetRNK]] == Sort[Round[1000 CosetLNK]],
Print["Das ist ein Normalteiler"], Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist kein Normalteiler

Diese Untergruppe hat selbst noch eine C_2 Untergruppe (Halbdrehungen), die wir aber nicht weiter diskutieren.

Drehungen um $2\pi/3$ um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Eckpunkte, isomorph zu C_3 , 3 Elemente.

```
In[ ]:= GroupSet1 = N[{e, b}];
```

```
In[ ]:= Do[GroupSet1 = Union[GroupSet1,
      Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]], {i, 1, Length[GroupSet1]},
        {j, 1, Length[GroupSet1]}], 1], SameTest -> (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
      Print[Length[GroupSet1]], {k, 1, 3}]
```

3

3

3

```
In[ ]:= CosetRNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 20

Wir ersparen uns den Ausdruck der 20 Elemente. Er könnten mit der Befehlsfolge erfolgen:

```
Print["Coset der rechten Nebenklasse:"];
```

```
Do[Print["H.", MatrixForm[Chop[CosetRNK[[i]]]], {i, 1, Length[CosetRNK]}];
```

```
In[ ]:= CosetLNK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der linken Nebenklassen: 20

Die Coset-Elemente beschreiben die Drehungen um eine Achse durch eines der 20 Ecken.

Ist diese Untergruppe ein Normalteiler? Dann müssten die rechten und linken Nebenklassen übereinstimmen:

```
In[ ]:= If[Sort[Round[1000 CosetRNK]] == Sort[Round[1000 CosetLNK]],
      Print["Das ist ein Normalteiler"], Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist kein Normalteiler

Drehungen um π um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten, isomorph zu C_2 , 2 Elemente.

Eine der vielen C_2 Untergruppen lässt sich durch die Elemente

```
In[ ]:= GroupSet1 = {e, GroupSet[[2]]};
```

konstruieren.

```
In[ ]:= Do[GroupSet1 = Union[GroupSet1,
      Flatten[Table[Mul[GroupSet1[[i]], GroupSet1[[j]]], {i, 1, Length[GroupSet1]},
        {j, 1, Length[GroupSet1]}], 1], SameTest -> (Norm[#1 - #2] < 0.01 &)];
      Print[Length[GroupSet1]], {k, 1, 3}]
```

2

2

2

Wir bilden die rechten und linken Nebenklassen dieser Untergruppe.

```
In[ ]:= CosetRNK = RechteNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der rechten Nebenklassen: 30

```
In[ ]:= CosetLNK = LinkeNebenklassen[GroupSet1, GroupSet];
```

Anzahl der linken Nebenklassen: 30

```
In[*]:= If[Sort[Round[1000 CosetRNK]] == Sort[Round[1000 CosetLNK]],
  Print["Das ist ein Normalteiler"], Print["Das ist kein Normalteiler"]];
```

Das ist ein Normalteiler

Konstruktion einer komplexen 2x2 Darstellung

In (20.64) haben wir festgestellt, wie die Drehachse und der Drehwinkel die Gruppenelemente aus den Generatoren festlegt. Wenn wir statt der 3x3 Generatoren die 2x2 Generatoren (Pauli-Matrizen) nehmen, erhalten wir die 2x2 Darstellung der Gruppe (vgl. Aufgabe 13):

$$\text{Exp}\left[\mathbf{I} \alpha \sum_{i=1}^3 n[i] \times \text{sigma}[i] / 2\right]$$

```
In[*]:= Ele[α_, n_] := {{1, 0}, {0, 1}} Cos[α/2] + I Sin[α/2] Sum[n[[i]] × sigma[i], {i, 1, 3}]
```

mit den (hermiteschen) Paulimatrizen

```
In[*]:= sigma[1] = {{0, 1}, {1, 0}};
sigma[2] = {{0, -I}, {I, 0}};
sigma[3] = {{1, 0}, {0, -1}};
```

Wir können also für jede 3x3 Matrix die Drehachse und den Drehwinkel berechnen (vgl. Kap. 10). Einfacher ist es, von vorne zu beginnen und nur die drei erzeugenden Elemente e, a und b in 2x2 Darstellung zu bringen.

```
In[*]:= e = {{1, 0}, {0, 1}};
```

Die Drehachse für das Element a war (0,0,1) und der Drehwinkel $2\pi/5$; entsprechen (10.64) müssen wir den halben Winkel für die fundamentale Darstellung verwenden, haben das aber in der Definition von "Ele" schon berücksichtigt:

```
In[*]:= a = Ele[2 Pi / 5, {0, 0, 1}]
```

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ i \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5}), 0 \right\}, \left\{ 0, -i \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} + \frac{1}{4} (1 + \sqrt{5}) \right\} \right\}$$

Die Drehachse für das Element b war

```
In[*]:= Drehachse
```

```
Out[*]= {0.607062, 0., -0.794654}
```

und der Drehwinkel $2\pi/3$, daher

```
In[*]:= b = Ele[2 Pi / 3, Drehachse]
```

```
Out[*]= {{0.5 - 0.688191 i, 0. + 0.525731 i}, {0. + 0.525731 i, 0.5 + 0.688191 i}}
```

```
In[*]:= Mul[a_, b_] := N[a.b];
```

```
In[*]:= MyNorm[X_] := Sum[Abs[N[X[[i, j]]]], {i, 1, Length[X]}, {j, 1, Length[X]}]
```

Die Matrixelemente verschiedener Gruppenelemente werden numerisch berechnet und können unter Umständen verschieden aussehen, obwohl sie eigentlich gleich sind. Aus diesem Grund müssen wir die Kontrolle auf "Gleichheit" geeignet modifizieren

```

In[ ]:= GroupSet = N[{e, a, b}];
Do[GroupSet = Union[GroupSet,
  Flatten[Table[Mul[GroupSet[[i]], GroupSet[[j]]], {i, 1, Length[GroupSet]},
    {j, 1, Length[GroupSet]}], 1], SameTest -> (MyNorm[#1 - #2] < 0.01 &)];
Print[Length[GroupSet], {k, 1, 5}]

7
29
112
120
120

```

Wir erhalten also plötzlich doppelt so viele Elemente, damit die Gruppe abgeschlossen ist! Der Grund liegt in der Beziehung zwischen SU(2) und SO(3). Die unitären, komplexen 2x2 Matrizen sind die fundamentale Darstellung der SU(2). Die gerade konstruierte Gruppe ist die sogenannte "Zentrumserweiterte Ikosaedergruppe".

Da die SU(2) "doppelt so gross" wie die SO(3) ist, ergeben sich für jedes R-Element zwei U-Elemente. Wie aber kommen wir zu einer Darstellung der SO(3)?

Wir müssen alle Elemente X der 2x2-Darstellung mit jeweils einem Partnerelement (-X) identifizieren.

Anders ausgedrückt: die so konstruierte Gruppe hat einen abelschen Normalteiler Z(2) bestehend aus den Elementen 1 und -1!

Wegen $SU(2)/Z(2) \simeq SO(3)$ suchen wir die Elemente der Faktorgruppe $SU(2)/Z(2)$, also die Menge aller Nebenklassen (Cosets) des Normalteilers. Jede Nebenklasse besteht dann aus zwei Elementen (X, -X). Die Multiplikation zweier solcher Elemente $(X, -X) \cdot (Y, -Y) = (XY, -XY)$.

Diese Faktorgruppe ist eine komplexe Darstellung der Ikosaedergruppe.

```

In[ ]:= ClearAll["Global`*"];

```

20.13

In (20.35) findet man eine Exponentialform der fundamentalen Matrixdarstellung der SU(2). Zeigen Sie durch Summation, dass diese Darstellung zur Form

$U(\mathbf{a}) = \mathbf{1} \cos(a/2) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} / a \sin(a/2)$ mit $a = |\mathbf{a}|$

führt. Beachten Sie, dass $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$.

Lösungsweg

Die Exponentialdarstellung lautet

$$\exp \left(\frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i \right)^n \frac{i^n}{n! 2^n}$$

Es ist

$$(a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \mathbf{1} + a_1 a_2 (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1) + a_1 a_3 (\sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + a_2 a_3 (\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2)$$

Da für die Pauli-Matrizen (Glg. 3.51) die Eigenschaft

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0 \text{ für } i \neq j$$

haben, verschwinden die gemischten Terme. Wir haben daher die Beziehung

$$(a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3)^2 = a^2 \mathbf{1}.$$

Wir können die Terme der Exponentialreihe daher in gerade und ungerade Potenzen zerlegen und finden

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i \right)^n \frac{i^n}{n! 2^n} &= \sum_{\text{gerade } n} \frac{i^n a^n}{n! 2^n} \mathbf{1} + \sum_{\text{ungerade } n} \frac{i^{n+1} a^{n+1}}{(n+1)! 2^{n+1}} \left(\frac{\mathbf{a}}{a} \right) \cdot \sigma \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)! 2^{2k}} \mathbf{1} + i \left(\frac{\mathbf{a}}{a} \right) \cdot \sigma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)! 2^{2k+1}} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{1} \cos(a/2) + i \left(\frac{\mathbf{a}}{a} \right) \cdot \sigma \sin(a/2)$$

wie zu zeigen war.

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

20.14

Die Pauli-Matrizen (3.51) sind proportional den Generatoren der SU(2). Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

und

berechnen Sie die Spuren (b) $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j)$, (c) $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k)$, (d) $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l)$.

Lösungsweg

$$(a) \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

Wenn $i=j$, dann ergibt das Quadrat jeder der Pauli-Matrizen die Einheitsmatrix.

Wenn aber $i \neq j$, so kann man explizit berechnen, dass

$$\sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = -\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2$$

und damit ist die Beziehung bewiesen. Auch die Kommutatorbeziehung (20.62) für die Pauli-Matrizen

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

ist offensichtlich erfüllt.

$$(b) \quad \text{tr}(\sigma_i \sigma_j)$$

Aus (a) sehen wir sofort

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij} \text{tr}(1) + i \epsilon_{ijk} \text{tr}(\sigma_k) = 2 \delta_{ij}$$

wegen der "Spurlosigkeit" der Pauli-Matrizen.

(c) $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k)$

Wir berechnen wieder mit Hilfe von (a)

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = \delta_{ij} \text{tr}(\sigma_k) + i \epsilon_{ijn} \text{tr}(\sigma_n \sigma_k) = 2 i \epsilon_{ijn} \delta_{nk} = 2 i \epsilon_{ijk}$$

(d) $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l)$

Wir berechnen wieder mit Hilfe von (a) und Summenkonvention

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) &= \delta_{ij} \text{tr}(\sigma_k \sigma_l) + i \epsilon_{ijn} \text{tr}(\sigma_n \sigma_k \sigma_l) = \\ &= 2 \delta_{ij} \delta_{kl} + i \epsilon_{ijn} 2 i \epsilon_{nkl} = 2 \delta_{ij} \delta_{kl} - 2 \epsilon_{ijn} \epsilon_{nkl} = 2 \delta_{ij} \delta_{kl} - 2 \epsilon_{ijn} \epsilon_{kln} \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir mit Hilfe von (10.xxxxxx) noch weiter vereinfachen und erhalten das Endergebnis

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) = 2 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \delta_{il} \delta_{jk} - 2 \delta_{ik} \delta_{jl}$$

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

20.15

Die drei Pauli-Matrizen (3.51) kann man als Komponenten eines Vektors σ betrachten. Drücken Sie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mit Hilfe der Spurbildung durch die Matrizen $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ und $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ aus.

Lösungsweg

Am einfachsten kann man das mittels der in Aufgabe 20.14 angegebenen Beziehungen zeigen

Wegen

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}$$

gilt

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} a_j \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \sum_{j=1}^3 a_j \delta_{ij} = a_i$$

und entsprechend für $\mathbf{b}$. Damit sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bestimmt. Weiters finden wir

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} a_i b_j \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Für das gesuchte äußere Produkt nutzen wir das Ergebnis aus Aufgabe 20.15(c):

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2 i \epsilon_{ijk}$$

und bilden

$$-\frac{i}{2} \text{tr}(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_k) = -\frac{i}{2} a_i b_j \text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = a_i b_j \epsilon_{ijk} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k$$

Zum Abschluss noch ein Beispiel mit Zahlenwerten:

```
In[*]:=  $\sigma_1 = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\};$ 
MatrixForm[ $\sigma_1$ ]
 $\sigma_2 = \{\{0, -I\}, \{I, 0\}\};$ 
MatrixForm[ $\sigma_2$ ]
 $\sigma_3 = \{\{1, 0\}, \{0, -1\}\};$ 
MatrixForm[ $\sigma_3$ ]
```

```
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

```

```
In[*]:= a = {1, 2, 3};
b = {-2, 5, 7};
```

```
In[*]:= asigma = a.{ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ }; MatrixForm[asigma]
```

```
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 - 2i \\ 1 + 2i & -3 \end{pmatrix}$$

```

```
In[*]:= bsigma = b.{ $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ }; MatrixForm[bsigma]
```

```
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 - 5i \\ -2 + 5i & -7 \end{pmatrix}$$

```

Wir vergleichen:

```
In[*]:=  $\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{asigma}.\mathbf{bsigma}]$ 
```

```
Out[*]= 29
```

```
In[*]:= a.b
```

```
Out[*]= 29
```

...stimmt.Und weiters:

```
In[*]:=  $\left\{ -\frac{I}{2} \text{Tr}[\mathbf{asigma}.\mathbf{bsigma}.\sigma_1], -\frac{I}{2} \text{Tr}[\mathbf{asigma}.\mathbf{bsigma}.\sigma_2], -\frac{I}{2} \text{Tr}[\mathbf{asigma}.\mathbf{bsigma}.\sigma_3] \right\}$ 
```

```
Out[*]= {-1, -13, 9}
```

```
In[*]:= Cross[a, b]
```

```
Out[*]= {-1, -13, 9}
```

..stimmt auch!

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

20.16

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ hat unter $SU(2)$ -Transformationen (U seien Matrizen der fundamentalen Darstellung) die Eigenschaft

$$\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = U (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^\dagger.$$

Zeigen Sie, dass dies einer SO(3)-Drehung

$$\mathbf{x}' = R \mathbf{x}$$

entspricht.

Lösungsweg

Die Komponenten von $\mathbf{x}'$ erhalten wir durch Projektion

$$x_i' = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(U (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) U^\dagger \sigma_i \right) = x_j \frac{1}{2} \text{Tr} (U \sigma_j U^\dagger \sigma_i) = R_{ij} x_j$$

mit

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} (U^\dagger \sigma_i U \sigma_j).$$

In[]:= ClearAll["Global`*"];

20.17

Überprüfen Sie für die Gruppe SU(2) die Orthogonalitätsrelation für Charaktere mit Hilfe expliziter Integration.

Lösungsweg

Die Orthogonalitätsrelation für Charaktere für kontinuierliche Gruppen (20.38) lautet

$$\int_G d\mu(\mathbf{g}) \overline{\chi_i(\mathbf{g})} \chi_j(\mathbf{g}) = \delta_{ij}$$

Die SU(2) hat für die Darstellung j (Dimension der Matrixdarstellung $= (2j+1)$, siehe M.20.4) die Charaktere

$$\chi_j(\mathbf{g}) = \frac{\sin(\alpha(j+1/2))}{\sin(\alpha/2)}$$

und das Gruppenintegral aus M.20.4 lautet

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2(\alpha/2) \dots$$

und wir müssen daher zeigen, dass

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2(\alpha/2) \frac{\sin(\alpha(i+1/2))}{\sin(\alpha/2)} \frac{\sin(\alpha(j+1/2))}{\sin(\alpha/2)} = \delta_{ij}$$

Wir formen (additionstheorem) um:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin(\alpha(i+1/2)) \sin(\alpha(j+1/2)) &= \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \frac{1}{2} (\cos(\alpha(i-j)) - \cos(\alpha(i+j+1))) &= \end{aligned}$$

für $i=j$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha(2i+1))) = \left(\frac{1}{\pi} \alpha - \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\alpha(2i+1))}{2i+1} \right) \Big|_0^\pi = 1$$

für $i \neq j$:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha(i-j))}{i-j} - \frac{\sin(\alpha(i+j+1))}{i+j+1} \right) \Big|_0^\pi = 0$$

..und damit gezeigt.

In[*]:= ClearAll["Global`*"];

20.18

Beweisen Sie für die Gruppe SU(2) die Relation zwischen den Charakteren der fundamentalen und der adjungierten Darstellung:

$$\chi_a = \chi_f^2 - 1.$$

Lösungsweg

In[*]:= 1. Variante

Aus M.20.4 wissen wir, dass Gruppe SU(2) für die Darstellung j (Dimension der Matrixdarstellung = (2j+1), siehe M.20.4) die Charaktere hat:

$$\chi_j(g) = \frac{\sin(\alpha(j+1/2))}{\sin(\alpha/2)}$$

$$\chi_{1/2}(g) = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = 2 \cos(\alpha/2)$$

$$\chi_1(g) = \frac{\sin(3\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{\sin(\alpha/2) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} =$$

$$\frac{1}{\sin(\alpha/2)} (\sin(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) - \sin^3(\alpha/2) + 2 \sin(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2)) =$$

$$3 \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = 4 \cos^2(\alpha/2) - 1$$

..wie erwartet!

Out[*]:= 2. Variante

Aus (20.64) sehen wir, dass für die fundamentale Darstellung

$$\text{tr}(U) = 2 \cos(\alpha/2)$$

gilt. Aus der Darstellung für U kann man die adjungierte Darstellungsmatrix R bestimmen:

$$U = 1 \cos(\alpha/2) + i \sigma_n \sin(\alpha/2)$$

$$R_{ij} = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j) \cos(\alpha) - \varepsilon_{ijk} n_k \sin(\alpha)$$

$$R_{11} + R_{22} + R_{33} = n_1 n_1 + n_2 n_2 + n_3 n_3 + (3 - (n_1 n_1 + n_2 n_2 + n_3 n_3)) \cos(\alpha) =$$

$$1 + 2 \cos(\alpha) = 1 + 2 (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)) =$$

$$1 + 2 (2 \cos^2(\alpha/2) - 1) = 4 \cos^2(\alpha/2) - 1$$

wie zu zeigen war.

In[*]:= ClearAll["Global`*"];

20.19

Beweisen Sie mit Hilfe von (20.39) und der Darstellung $U = u_0 + i \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ die Form des Gruppeninte-

grals für die SU(2) aus (M.20.4.8)!

Lösungsweg

Die Darstellung der SU(2) Matrizen in fundamentaler Darstellung ist

$$U = u_0 \mathbf{1} + i \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \text{ mit } u_0^2 = 1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2.$$

Um die Gruppenmultiplikation im Parameterraum zu formulieren, bilden wir

$$\begin{aligned} U(\mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) &\equiv U(\mathbf{a}) U(\mathbf{b}) = (a_0 \mathbf{1} + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(b_0 \mathbf{1} + i \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= a_0 b_0 \mathbf{1} + i b_0 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} + i a_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} - a_i b_j \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

Mit Hilfe der in Aufgabe 20.14 erwähnte Beziehung

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} - i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

finden wir

$$U(\mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{1} + i (\mathbf{b}_0 \mathbf{a} + a_0 \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

und daher

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}_0 \mathbf{a} + a_0 \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow$$

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}_0 \mathbf{a}_1 + a_0 \mathbf{b}_1 - a_2 \mathbf{b}_3 + a_3 \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}_0 \mathbf{a}_2 + a_0 \mathbf{b}_2 - a_3 \mathbf{b}_1 + a_1 \mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{h}_3(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}_0 \mathbf{a}_3 + a_0 \mathbf{b}_3 - a_1 \mathbf{b}_2 + a_2 \mathbf{b}_1$$

Nach (20.37) berechnen wir (Achtung b_0 hängt von $\mathbf{b}$ ab!)

$$M_{ij} = \frac{\partial \mathbf{h}_i(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\partial b_j} \rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{a_1 b_1}{b_0} + a_0 & \frac{a_1 b_2}{b_0} + a_3 & \frac{a_1 b_3}{b_0} - a_2 \\ \frac{a_2 b_1}{b_0} - a_3 & \frac{a_2 b_2}{b_0} + a_0 & \frac{a_2 b_3}{b_0} + a_1 \\ \frac{a_3 b_1}{b_0} + a_2 & \frac{a_3 b_2}{b_0} - a_1 & \frac{a_3 b_3}{b_0} + a_0 \end{pmatrix}$$

Das ist bei $\mathbf{b}=0$:

$$\det M = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0$$

Daraus erhalten wir (bis auf die Normierungskonstante) das Haarmaß als 3-dimensionale Integrationsmaß:

$$d^3 a \rho(\mathbf{a}) = C \frac{d^3 a}{a_0} = C \left((d^3 a) / \left(\sqrt{1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{a_0^2}} \right) \right).$$

Man kann das übrigens mit Hilfe einer Deltafunktion formal auch als 4-dimensionales Integrationsmaß hinschreiben:

$$C \left((d^3 a) / \left(\sqrt{1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{a_0^2}} \right) \right) = C \frac{d^4 a}{|a_0|} \left(\frac{1}{2} \delta(a_0 - \sqrt{1 - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{a_0^2}}) \right)$$

$$\left. \right) + \frac{1}{2} \delta \left(a_0 + \sqrt{1 - a^2} \right) \\ \left. \right) \left. \right) = C d^4 a \delta \left(a_0^2 + \right. \\ \left. \right. \\ - \\ 1)$$

Das 4-d Integrationsvolumen kann in einen Winkelanteil und einen Radialanteil faktorisiert werden

$$d^4 a = dx d^{(3)} \Omega \quad \text{wobei} \quad x^2 = a_0^2 +$$

$$a^2$$

Um C zu bestimmen integrieren wir über den gesamten Parameterraum. Die Winkelintegration ergibt in D Dimensionen

$$\int d^{(D)} \Omega = \frac{2 \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$$

und daher

$$\int d^{(4)} \Omega = \frac{2 \pi^2}{\Gamma(2)} = 2 \pi^2.$$

Wir finden so

$$C \int dx d^{(4)} \Omega \delta \left(x^2 - 1 \right) = 2 \pi^2 C \int_{x=0}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \delta(x-1) + \frac{1}{2} \delta(x+1) \right) = \pi^2 C$$

und sollte gleich 1 sein. Daher ist $C=1/\pi^2$ und

$$d^3 a \rho(a) = \frac{1}{\pi^2} \left(d^3 a \right) / \left(\sqrt{1 - a^2} \right) \\ \left. \right) \left. \right) \left. \right) .$$

Wir wollen dies aber zur Kontrolle auch in der 3-d Darstellung rechnen.

$$C \left(\left(d^3 a \right) / \left(\sqrt{1 - a^2} \right) \right) \\ \left. \right) \left. \right) = \\ C \\ \left(\left(a^2 da d\Omega \right) / \left(\sqrt{1 - a^2} \right) \right) \\ \left. \right) \left. \right)$$

Integration über den Raumwinkel ergibt 4π , das Integral über a kann mit der Substitution $a=\sin(\alpha/2)$, $0<\alpha<\pi$ berechnet werden:

$$C \frac{d^3 a}{a_0} = \frac{C \sin^2 (\alpha / 2) \cos (\alpha / 2)}{\cos (\alpha / 2)} d (\alpha / 2) d\Omega = C \sin^2 (\alpha / 2) d (\alpha / 2) d\Omega$$

Integration gibt

$$\int_{4\pi} \int_0^\pi C \sin^2 (\alpha / 2) d (\alpha / 2) d\Omega = C \frac{\pi}{4} 4\pi \text{ also } C = 1 / \pi^2$$

Wenn die zu integrierende Funktion nicht vom Raumwinkel abhängt - wie das bei den Charakteren der Fall ist - dann kann man das Gruppenintegral also einfach schreiben:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 (\alpha / 2) d\alpha f (\alpha)$$

Hier wird α nur über das halbe Definitionsintervall (es ist eigentlich: $(0, 2\pi)$) integriert. Man kann aber auch über das ganze Intervall integrieren und erhält einfach das Doppelte, oder, als Integral geschrieben:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 (\alpha / 2) d\alpha f (\alpha)$$

wie es zu zeigen war!

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```