Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 21. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

21.2

Aus einem Topf mit 5 Kugeln (3 aus Silber und 2 aus Gold) zieht man zufällig zwei Kugeln (ohne zurückzulegen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man bei zweimaligem Ziehen zwei Goldkugeln?

Lösungsweg

A=Gold beim 1. Mal
B=Gold beim 2.Mal

Es ist offenbar P(A)=2/5

Wenn man beim ersten Mal Gold gezogen hat, bleiben 3 Silberkugeln und 1 Goldkugel. Die Wahrscheinlichkeit, dann wieder Gold zu ziehen ist also

P(B|A)=1/4.

Beide Male Gold zu ziehen ist das Ereignis AB. Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt

P(AB)=P(B|A) P(A) ergibt P(AB)=1/10,

die Antwort ist also 0.1.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.3

Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie beim gerade getätigten Atemzug zumindest ein Molekül einatmen, das Julius Caesar bei seinem letztes Atemzug (Auch du, Brutus!) ausgeatmet hat? Nehmen Sie ein Atemvolumen von 3 Liter und 2.7 10^{22} Moleküle pro Liter an.

Lösungsweg

Mittleres Luftvolumen der Erde bei etwa 10 km Höhe der Atmosphäre ist näherungsweise

$4\,\pi r^2 h = 4\,\pi (6.4\,10^6)^2 10^4\, m^3 = 5.14719 \times 10^{18}\, m^3 = 5.14719 \times 10^{21} l$

Das sind also N=1.4 10^{44} Moleküle; ein Atemzug enthält A=8 10^{22} Moleküle. Bei gleichmäßiger Durchmischung ist die Wahrscheinlichkeit, zumindest eines von A (Caesar) aus N Molekülen zu finden

$p = A / N = 5.7 \times 10^{22}.$

Da A<< N, ändert sich p nur unwesentlich, wenn ein "markiertes" Molekül eingeatmet wird. Die Wahrscheinlichkeit, {\em kein} solches einzuatmen ist daher

$(1-p)^A = \exp(A \ln(-p)) \simeq \exp(-A\, p) \approx 1.4\, 10^{-20}$,

also praktisch null. Jeden Ihrer Atemzüge teilen Sie mit Caesar!

Alternatives Argument:
Die Poisson-Verteilung (μ=A^2/N) für k=0 gibt die Wahrscheinlichkeit, *kein* markiertes Molekül einzuatmen, also exp(-μ), welches den gleichen Wert liefert.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.4

Wenn ein Messgerät (zum Beispiel eine Funkenkammer) ein durchlaufendes Teilchen gemessen hat, fällt es für eine kurze Zeitspanne δ aus, bis es wieder messbereit ist. Wenn nun während eines Zeitraums T zwei Teilchen, jedes zu einem zufälligen Zeitpunkt, einfallen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch beide gemessen werden?

Lösungsweg

Die Fragestellung erinnert an die bekannte Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit zwei Personen in einem Raum denselben Geburtstag haben, wird aber durch die Intervallangabe etwas kompliziert. Wir wollen das Ergebnis auf zwei Arten ableiten und dann durch ein Computerexperiment überprüfen.

(1)

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebig gewählten Intervall NICHT gleichzeitig zwei Teilchen eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebig gewählten Intervall ein Teilchen nicht eintrifft ist (1-$\frac{\delta}{T}$), die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Teilchen NICHT eintreffen ist daher

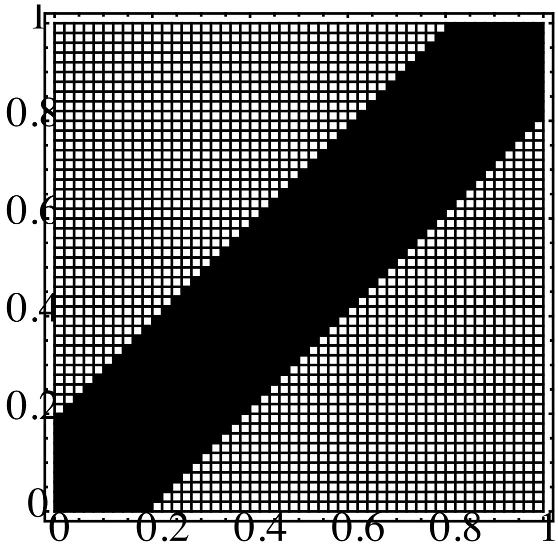
$$\left(1-\frac{\delta}{T}\right)^2$$

(2)

Wir überlegen uns die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer Skizze, in der wir den Zeitpunkt des Eintreffens von Teilchen 1 durch t_1 auf der x-Achse, das von Teilchen 2 durch t_2 auf der y-Achse markieren.

In unserer Skizze ist T=1, δ=0.2:

DensityPlot[If[Abs[t1-t2]<0.2,0,1],{t1,0,1},{t2,0,1},PlotPoints→50]



-DensityGraphics-

Die Wahrscheinlichkeit, dass das unerwünschte Ereignis "beide Teilchen innerhalb eines δ-Intervall" nicht eintritt, entspricht der weißen Fläche der beiden Dreiecke, geteilt durch die Gesamtfläche:

$$2\,\frac{(T-\delta)^2}{2}\,\frac{1}{T^2}=\left(1-\frac{\delta}{T}\right)^2$$

(3)

Wir versuchen, dieses Ergebnis durch ein Computerexperiment zu überprüfen. Wir wählen T=1 und δ=0.1. Wir erwarten den Wert

```
In[•]:= δ = 0.1;
        (1 - δ)^2
Out[•]= 0.81
```

Wir betrachten nun Num=10000 Experimente, in denen jeweils zu zwei zufälligen Zeitpunkten Teilchen einfallen. Wenn der Zeitabstand kleiner als δ ist, erhöhen wir einen Zähler "notok" um 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fall nicht eintritt, wird mit (1-notok/Num) berechnet.

In[•]:=
```
Num = 10 000; notok = 0;
Do[If[Abs[Random[Real, {0., 1.}] - Random[Real, {0., 1.}]] < δ, notok = notok + 1],
  {i, 1, Num}];
N[1 - notok / Num]
```

Out[•]=
```
0.8093
```

Der Wert liegt nahe beim exakten Wert (für Num=1000000 ergab das Experiment 0.810036)

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.5

Elektronen erreichen eine kreisrunde Anode (Radius R); die Wahrscheinlichkeit des Treffens sei für alle Flächenelemente gleich. Welche Form hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung F(r)?

Lösungsweg

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron im Inneren eines Teilkreises mit Radius r auftrifft ist proportional zur Fläche. Daher ist

$F(r<0)=0$,

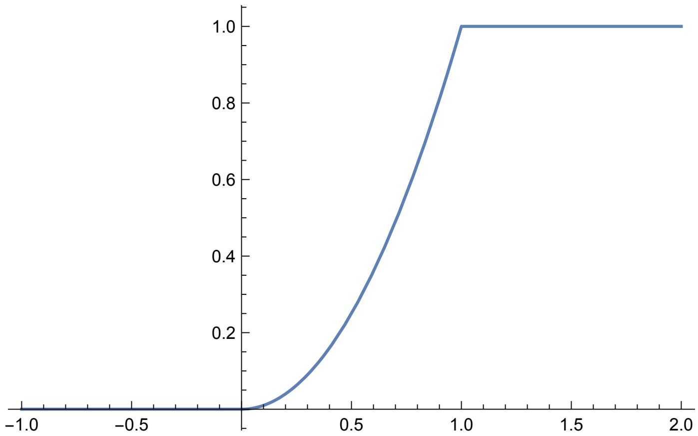
$F(0\leq r\leq R)=\frac{r^2}{R^2}$,

$F(R\leq r)=1$

Hier ein Plot von F:

In[•]:=
```
Plot[If[r < 0, 0, If[r < 1, r^2, 1]], {r, -1, 2}, PlotRange → All]
```

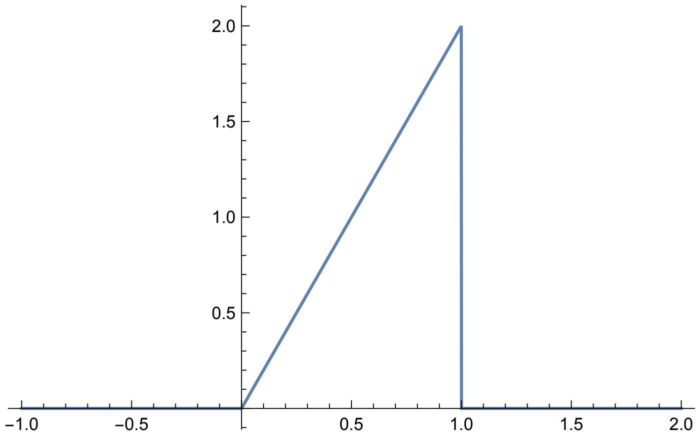
Out[•]=



Und hier ein Plot der Dichte f=F':

In[∘]:=
```
Plot[If[r < 0, 0, If[r < 1, 2 r, 0], 0], {r, -1, 2}, PlotRange → All]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.6

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Ziffernsumme einer zufälligen 32-stelligen Binärzahl (führende Nullen sind auch erlaubt, es gibt also 2^{32} Möglichkeiten) ein Vielfaches von 8 ist?

Lösungsweg

Es gibt vier mögliche Vielfache: 8, 16, 24, 32; die Binomialverteilung ergibt mit

$\binom{32}{8}+\binom{32}{16}+\binom{32}{24}+\binom{32}{32}$=622116991 die Wahrscheinlichkeit 0.144848.

In[∘]:=
```
Binomial[32, 8]
```

Out[∘]= 10 518 300

In[∘]:=
```
Binomial[32, 16]
```

Out[∘]= 601 080 390

In[∘]:=
```
Binomial[32, 24]
```

Out[∘]= 10 518 300

In[∘]:=
```
Binomial[32, 32]
```

Out[∘]= 1

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist die Summe diese Zahlen geteilt durch 2^{32}:

In[∘]:=
```
N[(Binomial[32, 8] + Binomial[32, 16] + Binomial[32, 24] + Binomial[32, 32]) / 2^32]
```

Out[∘]= 0.144848

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.7

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) haben von 1000 zufällig gewählten Zahlen zwischen 1 und 100 genau fünf den Wert 50,

(b) haben von 100 Personen zwei am 1.1. Geburtstag?

Lösungsweg

In beiden Fällen gilt die Binomialverteilung; da aber jeweils N groß ist und Einzelwahrscheinlichkeit p klein ist, ist die Poisson-Verteilung zutreffend.

(a)
n=1000, k=5, Einzelwahrscheinlichkeit den Wert 50 zu erhalten p= 1/100 (die Wahrscheinlichkeit, den Wert nicht zu finden ist 99/100).
Für die Poisson-Verteilung berechnen wir

μ=n p =10.

P=$\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

In[∘]:=
```
μ = 10; k = 5; P = N[μ^k/k! Exp[-μ]]
```
Out[∘]=
```
0.0378333
```

Mit der Binomialformel ergibt sich

In[∘]:=
```
n = 1000; p = 0.01; k = 5; P = N[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n-k)]
```
Out[∘]=
```
0.0374531
```

...die Poisson-Verteilung ist also eine gute Näherung (und der Binomialkoeffizient ist für so große Werte nur per Computeralgebra berechenbar!

(b)
Exakt zutreffend wäre die Binomialverteilung (2 Treffer aus 100) mit
n=100, k=2, p=1/365

In[∘]:=
```
n = 100; p = 1/365; k = 2; P = N[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n-k)]
```
Out[∘]=
```
0.0283958
```

Eine sehr gute Näherung ist aber auch hier die Poisson-Verteilung mit

μ=n p =100/365.

In[∘]:=
```
μ = 100; k = 2; μ = 100/365; P = N[μ^k/k! Exp[-μ]]
```
Out[∘]=
```
0.0285364
```

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.8

Nehmen Sie einen Würfel, und werfen Sie zweimal. Die Zufallsvariable X sei die Augenzahl des ersten Wurfs, Y sei jeweils die Summe der Augen beider Würfe. Wiederholen Sie das Experiment, und zeichnen Sie in ein (x,y)-Diagramm jeweils die Position der "gemessenen" Punkte ein. Erkennen Sie eine Struktur. Warum?

Lösungsweg

Wir würfeln NW Doppelwürfe (A,B):

```
In[•]:= NW = 1000;
```

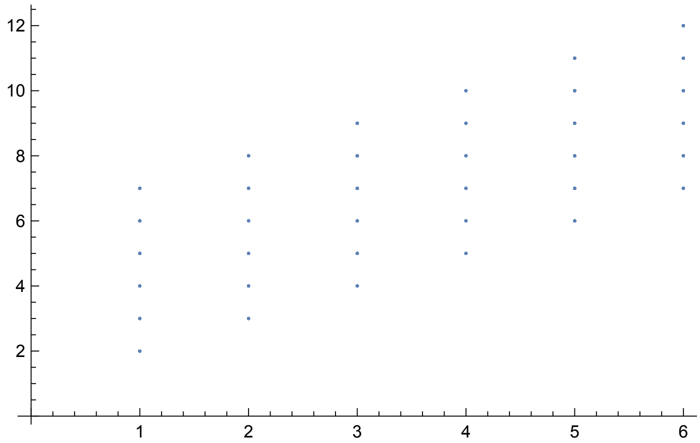
```
In[•]:= Wuerfe = Table[{Random[Integer, {1, 6}], Random[Integer, {1, 6}]}, {i, 1, NW}];
```

Die Punktepaare (x,y) sind dann

```
In[•]:= Punkte = Table[{Wuerfe[[i, 1]], Wuerfe[[i, 1]] + Wuerfe[[i, 2]]}, {i, 1, NW}];
```

```
In[•]:= ListPlot[Punkte]
```

Out[•]=



Die Werte X=A und Y=A+B sind offenbar korreliert. Man kann den Korrelationskoeffizienten

$\rho(X, Y) = (\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle) \big/ \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$

theoretisch bestimmen, da ja A und B unabhängig sind:

$$\begin{aligned}
&\langle X\,Y \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle \\
&= \langle A\,(A + B) \rangle - \langle A \rangle \langle A + B \rangle \\
&= \langle A^2 \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle - \langle A \rangle^2 - \langle A \rangle \langle B \rangle \\
&= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\
&= \mathrm{Var}\,(A)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(A)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\,(Y) \\
&= \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 \\
&= \langle A^2 \rangle + 2\langle AB \rangle + \langle B^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \\
&\qquad - 2\langle A \rangle \langle B \rangle - \langle B \rangle^2 \\
&= \mathrm{Var}\,(A) + \mathrm{Var}\,(B) = 2\,\mathrm{Var}\,(A)
\end{aligned}$$

$\rho(X, Y) = 1 \big/ \sqrt{2}$

Für unsere Experiment ergibt sich folgender Zahlenwert für den Korrelationskoeffizienten:

```
In[•]:= CXY = Sum[Punkte[[i, 1]] * Punkte[[i, 2]], {i, 1, NW}] / NW;
        CXX = Sum[Punkte[[i, 1]]^2, {i, 1, NW}] / NW;
        CYY = Sum[Punkte[[i, 2]]^2, {i, 1, NW}] / NW;
        CX = Sum[Punkte[[i, 1]], {i, 1, NW}] / NW;
        CY = Sum[Punkte[[i, 2]], {i, 1, NW}] / NW;
```

```
In[•]:= VarX = N[CXX - CX^2]
Out[•]= 2.9924
```

Theoretischer Wert: 35/12=2.91666...

```
In[•]:= VarY = N[CYY - CY^2]
Out[•]= 5.85026
```

Theoretischer Wert: 35/6=5.8333...

```
In[•]:= Corr = N[(CXY - CX * CY) / Sqrt[VarX * VarY]]
Out[•]= 0.716406
```

Theoretischer Wert: (siehe oben) $1/\sqrt{2}$ = 0.7071...

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.9

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für Z=X+Y, wenn X und Y beide gleichverteilt in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ sind.

Lösungsweg

Die Einzeldichten sind

$f_X(x) = 1$ für $-1/2 \leq x < 1/2$, sonst 0 und f_Y analog.

Daher ist (Fundamentalsatz, Gleichung (21.71))

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx =$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} f_Y(z-x)\, dx = \int_{x=1/2}^{x=-1/2} f_Y(z-x)\, d(z-x) = \int_{z-1/2}^{z+1/2} f_Y(t)\, dt$$

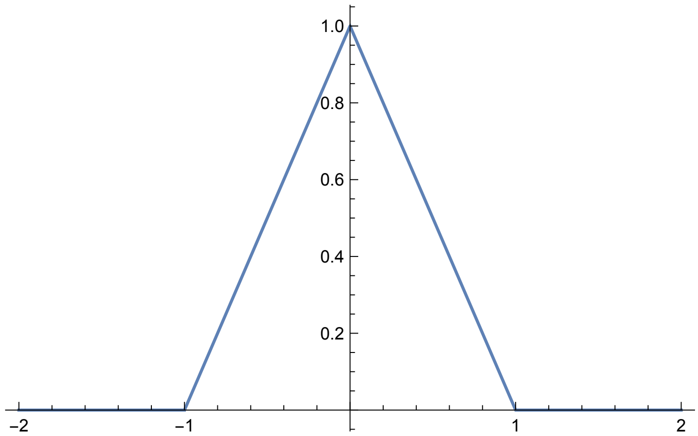
0 für $z \leq -1$ und $z \geq 1$,

$-1 < z < 0 : 1 + z$,

$0 < z < 1 : -(z-1) = 1 - z$.

In[ ]:=
```
Plot[If[z < -1, 0, If[z < 0, z + 1, If[z < 1, 1 - z, 0]]], {z, -2, 2}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.10

Die Zufallsvariablen X und Y haben die Verteilungsdichte

$$f(x, y) = c \exp\left(-1 - 2x - 17x^2 + 4y - 12xy - 8y^2\right).$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante c sowie die wichtigsten Parameter: Mittelwerte, Varianzen und Korrelationskoeffizient der Variablen.

Lösungsweg

Der Exponent hat die Form

$$-1 - 2x + 4x + (x\ y) \begin{pmatrix} -17 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und wir wollen diesen Ausdruck diagonalisieren, also als Summe von quadratischen Termen darstellen, um die Gauß-Integration zu erleichtern.

In[ ]:=
```
Eigensystem[(-17 -6
             -6  -8)]
```

Out[ ]= {{-20, -5}, {{2, 1}, {-1, 2}}}

Beide Eigenwerte (-20, -5) sind negativ, daher ist die quadratische Form negativ definit und das Integral wohldefiniert. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit}$$

In[ ]:=
```
A = (-1 2
      2 1);
```

Die Umkehrung ist {x,y}=

In[ ]:=
```
{x, y} = Inverse[A].{u, v}
```

Out[ ]= $\left\{-\frac{u}{5} + \frac{2v}{5}, \frac{2u}{5} + \frac{v}{5}\right\}$

Es wird ab hier automatisch x, y durch die entsprechenden Funktionen von u und v ersetzt. Wir finden

In[∘]:=
```
Simplify[-1 - 2 x - 17 x^2 + 4 y - 12 x y - 8 y^2]
```
Out[∘]= $-1 + 2 u - u^2 - 4 v^2$

oder:

In[∘]:=
```
Expand[- (1 - u) ^2 - 4 v^2]
```
Out[∘]= $-1 + 2 u - u^2 - 4 v^2$

Bei der Variablentransformation müssten wir noch die Jacobi-Determinante berücksichtigen, da ja

dx dy = Abs[Det [Inverse[A]]] du dv

gilt. Da aber die Normierungskonstante noch nicht bekannt ist, können wir uns das ersparen und den Faktor in c aufnehmen, das wir nun berechnen. Wir haben also
die Verteilung in eine Produktverteilung umgeformt,

$$f(u, v) = c \exp\left(-(1-u)^2\right) \exp\left(-4 v^2\right)$$

Es ist das Gaußintegral

In[∘]:=
```
Integrate[E^(-a t^2), {t, -Infinity, Infinity}]
```
Out[∘]= ConditionalExpression$\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}, \text{Re}[a] > 0\right]$

und so liefert die Integration über f(u,v) den Wert

$$c \frac{\sqrt{\pi}}{1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4}}$$

und daher (bei Berücksichtigung der Jacobi-Determinante) c=10/π.

Wir schlagen für die weitere Rechnung vor, die Wahrscheinlichkeitsdichte eben durch das Produkt der Verteilungsdichten für u und v anzuschreiben und entsprechend auszuwerten. Es ist

In[∘]:=
```
fu[u_] := E^(- (1 - u) ^2) / √π ;
fv[v_] := 2 E^(-4 v^2) / √π ;
```

Die gesuchten Mittelwerte können wir durch explizite Integration berechnen:

In[∘]:=
```
unorm = Integrate[fu[u], {u, -Infinity, Infinity}]
u1 = Integrate[u fu[u], {u, -Infinity, Infinity}]
u2 = Integrate[u^2 fu[u], {u, -Infinity, Infinity}]
```
Out[∘]= 1

Out[∘]= 1

Out[∘]= $\frac{3}{2}$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften sieht man sofort, dass

$< u >= 1; < v >= 0; < u v >= < u > < v >= 0$

Bei der Berechnung der 2. Momente kann man sich die Integration ersparen, wenn man die bekannten Beziehung

In[•]:=
```
Integrate[t^2 Sqrt[a] E^(-a t^2) / Sqrt[π], {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[•]= $\text{ConditionalExpression}\left[\frac{1}{2\,a}, \text{Re}[a] > 0\right]$

verwendet. Man muss allerdings aufpassen: es ist <(1-u)^2>=1/2 aus dieser Beziehung, und erst daraus dann <u^2>=1/2-1+2<u>=3/2.

Es ergibt sich also

$\langle u \rangle = 1$
$\langle v \rangle = 0$
$\langle u\,v \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle = 0$
$\langle u^2 \rangle = 3/2$
$\langle v^2 \rangle = 1/8$

Daraus bestimmen wir leicht die gesuchten Erwartungswerte. Es ist

In[•]:= **x**

Out[•]= $-\frac{u}{5}+\frac{2\,v}{5}$

und daher $\langle x \rangle = -\frac{\langle u \rangle}{5}+\frac{2\langle v \rangle}{5} = -\frac{1}{5.}$

In[•]:= **y**

Out[•]= $\frac{2\,u}{5}+\frac{v}{5}$

und daher $\langle y \rangle = \frac{2\langle u \rangle}{5}+\frac{\langle v \rangle}{5} = \frac{2}{5.}$

In[•]:= **Expand[x^2]**

Out[•]= $\frac{u^2}{25}-\frac{4\,u\,v}{25}+\frac{4\,v^2}{25}$

In[•]:= $\boldsymbol{\frac{u^2}{25}-\frac{4\,u\,v}{25}+\frac{4\,v^2}{25}}$

Out[•]= $\frac{u^2}{25}-\frac{4\,u\,v}{25}+\frac{4\,v^2}{25}$

und daher $\langle x^2 \rangle = 2/25$ und $\sigma^2 = 2/25 - 1/25 = 1/25$

In[•]:= **Expand[y^2]**

Out[•]= $\frac{4\,u^2}{25}+\frac{4\,u\,v}{25}+\frac{v^2}{25}$

und daher $\langle y^2 \rangle = 49/200$ und $\sigma^2 = 49/200 - 4/25 = 17/200$.

In[•]:= **Expand[x y]**

Out[•]= $-\frac{2\,u^2}{25}+\frac{3\,u\,v}{25}+\frac{2\,v^2}{25}$

In[•]:=
$$-\frac{2\ (3/2)}{25}+\frac{2\ (1/8)}{25}$$

Out[•]=
$$-\frac{11}{100}$$

und daher <x y>=-11/100. Der Korrelationskoeffizient ist

In[•]:=
```
(-11/100 - (-1/5) (2/5)) / Sqrt[(1/25) (17/200)]
```

Out[•]=
$$-\frac{3}{\sqrt{34}}$$

...und damit haben wir alles Gesuchte berechnet.

Zum Abschluss plotten wir noch eine typische Punkteverteilung für diese Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Der folgende Befehl erzeugt bei jedem Aufruf einen (x,y) Punkt entsprechend der betrachteten Verteilung.

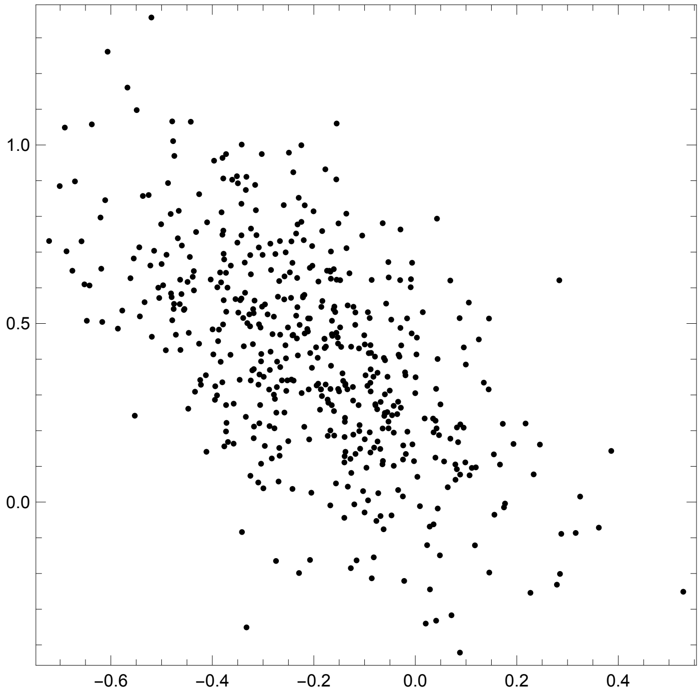
In[•]:=
```
NextPoint := (
u = Random[NormalDistribution[1, Sqrt[1/2]]];
v = Random[NormalDistribution[0, Sqrt[1/8]]];
x = (-u + 2 v) / 5; y = (2 u + v) / 5;
Point[{x, y}]);
```

Wir berechnen nun 500 Punkte.

In[•]:=
```
Ntotal = 500;
Plist = Table[NextPoint, {i, 1, Ntotal}];
```

In[•]:=
```
Show[Graphics[Plist], AspectRatio -> 1, Frame -> True]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.12

Erzeugen Sie sich eine Gruppe von 100 gleichverteilten Daten, zum Beispiel mit Hilfe eines Computers. Berechnen Sie für diese Daten Mittelwert und Varianz nach der Standarddefinition und nach dem Jackknife-Verfahren. Beschreiben Sie Ihre Erfahrungen.

Lösungsweg

Zuerst erzeugen wir die Daten:

In[•]:=
```
NData = 100;
MyData = Table[Random[], {i, 1, NData}];
```

Nun berechnen wir die Parameter nach der Standarddefinition:

In[•]:=
```
MyMean = Sum[MyData[[i]], {i, 1, NData}] / NData
```

Out[•]=
```
0.485636
```

In[•]:=
```
SumSq = Sum[MyData[[i]]^2, {i, 1, NData}];
```

In[•]:=
```
MyVar = (NData / (NData - 1)) * (SumSq / NData - MyMean^2)
```

Out[•]=
```
0.0838346
```

Der daraus berechnete wahrscheinliche Fehler der Mittelwertschätzung ist daher

In[•]:=
```
ErrDat1 = Sqrt[MyVar / NData]
```

Out[•]=
```
0.0289542
```

Den Fehler der Varianzschätzung berechnen wir mittels Jackknife.

Jackknife-Verfahren ohne Blockbildung:

(a) Fehler der Mittelwertschätzung

Die Schätzfunktion für den Mittelwert ist $\hat{\theta}$. Wir berechnen zunächst einen neuen Satz von NData verschiedenen Mittelwerten $\hat{\theta}_i$, jeweils durch Streichung eines Datenwerts.

```
In[•]:= NewMeans = Table[N[(MyMean * NData - MyData[[i]]) / (NData - 1)], {i, 1, NData}];

In[•]:= NewVar = ((NData - 1) / NData) Sum[(MyMean - NewMeans[[i]]) ^2, {i, 1, NData}]

Out[•]= 0.000838346

In[•]:= ErrDatJN = Sqrt[NewVar]

Out[•]= 0.0289542
```

Dieser Fehler ist also mit dem naiv berechneten identisch.
Damit ist der geschätzte Mittelwert und dessen geschätzter Fehler:

```
In[•]:= Print["Geschätzter Mittelwert:",
          MyMean, "\n(geschätzter Fehler:    ", ErrDatJN, ")"];

        Geschätzter Mittelwert:0.485636
        (geschätzter Fehler:    0.0289542)
```

Der echte Mittelwert ist 0.5.

(b) Fehler des Varianzschätzwerts

Hier ist die untersuchte Schätzfunktion $\hat{\theta}$ die Varianz des Datensatzes (MyVar). Wir berechnen $\hat{\theta}_i$ - den neuen Satz von NData verschiedenen Varianzen - jeweils durch Streichung eines Datenwerts.

```
In[•]:= NewData = ((NData - 1) / (NData - 2)) *
                Table[
            N[(SumSq - MyData[[i]] ^2) / (NData - 1) - NewMeans[[i]] ^2], {i, 1, NData}];

In[•]:= JNVar = ((NData - 1) / NData) Sum[(MyVar - NewData[[i]]) ^2, {i, 1, NData}]

Out[•]= 0.0000586336

In[•]:= ErrVarJN = Sqrt[JNVar]

Out[•]= 0.00765726
```

Damit ist der mittels Jackknife-Verfahren aus unserem Datensatz geschätzte Wert für die Varianz

```
In[•]:= Print["Geschätzte Varianz  ", MyVar, "\n(geschätzter Fehler:", ErrVarJN, ")"];

        Geschätzte Varianz  0.0838346
        (geschätzter Fehler:0.00765726)
```

Der tatsächliche Wert für die Gleichverteilung ist 0.0833.

Der richtige Wert liegt also knapp im Fehlerbereich. Das wird manchmal besser, manchmal schlechter erfüllt sein. Wiederholen Sie die Rechnung mit anderen Datensätzen!

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.13

Berechnen Sie für die Messdaten {0.727, 0.120, 0.105, 0.005, 1.099} den Mittelwert $\hat{X}$, die (korrigierte und unkorrigierte) Varianz und den geschätzten Fehler des Mittelwerts.

Lösungsweg

```
In[•]:= MyData = {0.727, 0.120, 0.105, 0.005, 1.099};

In[•]:= Mean[MyData]

Out[•]= 0.4112

In[•]:= Variance[MyData]

Out[•]= 0.229088

In[•]:= MX = Sum[MyData[[i]], {i, 1, 5}] / 5;
        MXX = Sum[MyData[[i]] ^ 2, {i, 1, 5}] / 5;

In[•]:= UnkorrigierteVarianz = MXX - MX ^ 2

Out[•]= 0.183271

In[•]:= KorrigierteVarianz = (5 / 4) * (MXX - MX ^ 2)

Out[•]= 0.229088

In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.14

Berechnen Sie zu den Datenwerten
(x_i, σ_i)= (4.46, 1.00), (5.56, 1.31), (4.11, 1.09), (5.40, 1.24), (5.28, 1.48), (5.30, 1.34)
den Mittelwert $\hat{X}$, und den geschätzten Fehler des Mittelwerts.

Lösungsweg

Die Daten sind laut Annahme statistisch unabhängig. Wir verwenden die Methoden aus 21.5.3.

```
In[•]:= MyData = {{4.46, 1.00}, {5.56, 1.31},
          {4.11, 1.09}, {5.40, 1.24}, {5.28, 1.48}, {5.30, 1.34}}

Out[•]= {{4.46, 1.}, {5.56, 1.31}, {4.11, 1.09}, {5.4, 1.24}, {5.28, 1.48}, {5.3, 1.34}}
```

Wir berechnen die notwendigen Summen:

```
In[•]:= MM = Sum[1 / MyData[[i, 2]] ^2, {i, 1, 6}];
        MX = Sum[MyData[[i, 1]] / MyData[[i, 2]] ^2, {i, 1, 6}];
        MXX = Sum[MyData[[i, 1]] ^2 / MyData[[i, 2]] ^2, {i, 1, 6}];
```

```
In[•]:= XMean = MX / MM
Out[•]= 4.90027
```

```
In[•]:= XError = Sqrt[1 / MM]
Out[•]= 0.494576
```

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.15

Sie haben die fünf Wertepaare (x,y) einer periodischen Funktion sin x gemessen:
(1, 2.47), (2, 2.79), (3, 0.40), (4, -2.37), (5, -2.89).
Bestimmen Sie die Amplitude und den Fehler (eine Standardabweichung) dieses Wertes unter der Annahme, dass eigentlich χ^2=4 sein sollte. Wie groß ist dann der Fehler σ der Datenwerte?.

Lösungsweg

Die Daten wurden mit dem Befehl erzeugt:

Data=Table[{x,Sin[x]*(3+Random[NormalDistribution[0,0.1]])},{x,1,5}]

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"]
```

```
In[•]:= MyData = {{1, 2.47}, {2, 2.79}, {3, 0.40}, {4, -2.37}, {5, -2.89}};
```

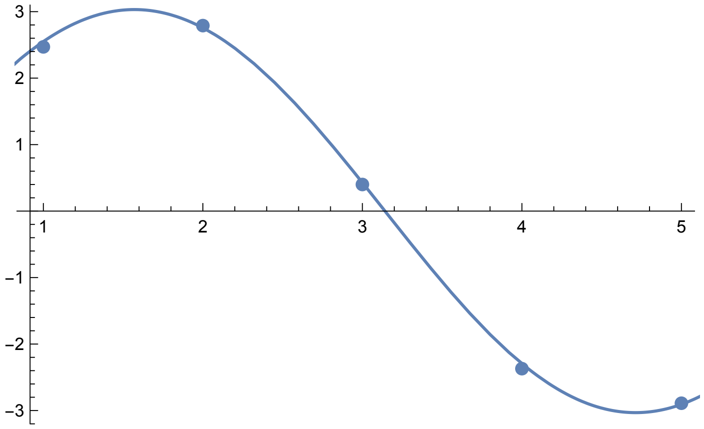
Wir verwenden zuerst das in Mathematica eingebaute Fit-Programm, später dann die expliziten Formeln.

```
In[•]:= MyFun[x_] = Fit[MyData, {Sin[x]}, x]
Out[•]= 3.03132 Sin[x]
```

Wir plotten Daten und Fit:

In[∘]:=
```
P1 =
  ListPlot[MyData, PlotStyle -> PointSize[0.02], DisplayFunction -> Identity];
P2 = Plot[MyFun[x], {x, 0, 6}, DisplayFunction -> Identity];
Show[P1, P2, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[∘]=



Wir berechnen χ^2:

In[∘]:=
```
ChiChi = Sum[(MyFun[MyData[[i, 1]]] - MyData[[i, 2]])^2, {i, 1, 5}]
```

Out[∘]= 0.0144677

Tatsächlich soll der Wert 4 sein, wir bestimmen daher einen Korrekturfaktor:

In[∘]:=
```
sigma = 1 / Sqrt[4 / ChiChi]
```

Out[∘]= 0.0601409

Nun führen wir die Rechnung (mit dem neuen Wert für die Fehler) explizit noch einmal durch:

In[∘]:=
```
MM = Sum[1 / sigma^2, {i, 1, 5}];
MXX = Sum[Sin[MyData[[i, 1]]]^2 / sigma^2, {i, 1, 5}];
MYX = Sum[Sin[MyData[[i, 1]]] * MyData[[i, 2]] / sigma^2, {i, 1, 5}];
MXXY = Sum[Sin[MyData[[i, 1]]]^2 * MyData[[i, 2]] / sigma^2, {i, 1, 5}];
MYY = Sum[MyData[[i, 2]]^2 / sigma^2, {i, 1, 5}];
```

Die Varianz des Fitparameters ist

In[∘]:=
```
ParVar = 1 / MXX
```

Out[∘]= 0.00118701

In[∘]:=
```
EpsVar = Sqrt[ParVar]
```

Out[∘]= 0.034453

Nur zur Kontrolle: χ^2sollte den Wert 4 haben:

In[∘]:=
```
ChiChi = Sum[(MyFun[MyData[[i, 1]]] - MyData[[i, 2]])^2 / sigma^2, {i, 1, 5}]
```

Out[∘]= 4.

Das sollte mit dem folgenden Ausdruck übereinstimmen:

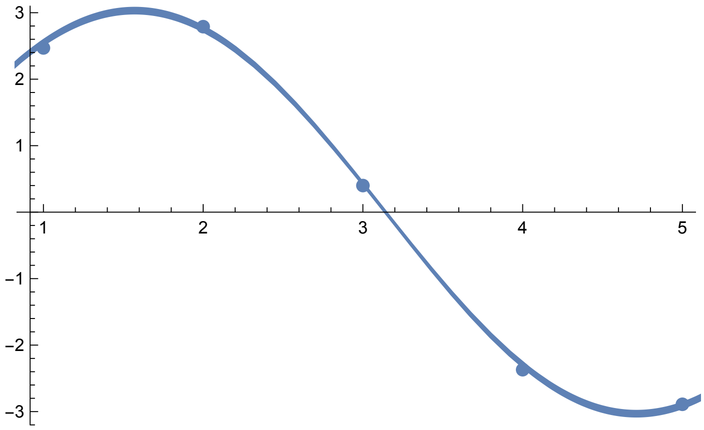
In[∘]:=
```
MYY - MYX^2 / MXX
```

Out[∘]= 4.

Schließlich zeichnen wir noch ein Fehlerband

In[∘]:=
```
MyFun[0.00000026]
```
Out[∘]= 7.88144×10^{-7}

In[∘]:=
```
P3 = Plot[N[EpsVar * Abs[Sin[x]] + MyFun[x]], {x, 0, 6}];
```
In[∘]:=
```
P4 = Plot[N[-EpsVar * Abs[Sin[x]] + MyFun[x]], {x, 0, 6}];
```
In[∘]:=
```
Show[{P1, P2, P3, P4}, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

21.16

Sie haben drei Datenpunkte

(x, y) = (0.25, 0.81), (0.5, 0.58), (0.7, 0.32)

und wollen dazu eine Gerade a+b x anpassen. Bestimmen Sie die Parameterwerte, und schätzen Sie deren Fehlerbalken.

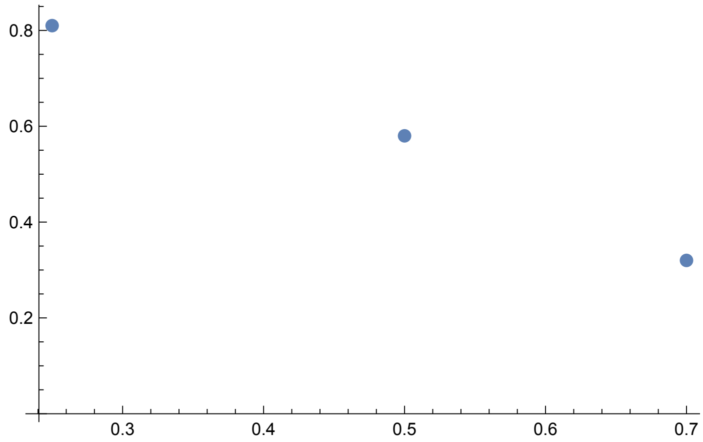
Lösungsweg

Zuerst verschaffen wir uns einen Eindruck von den Daten:

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

```
In[•]:= Data = {{0.25, 0.81}, {0.5, 0.58}, {0.7, 0.32}};
sigma = 1;
P1 = ListPlot[Data, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

Out[•]=

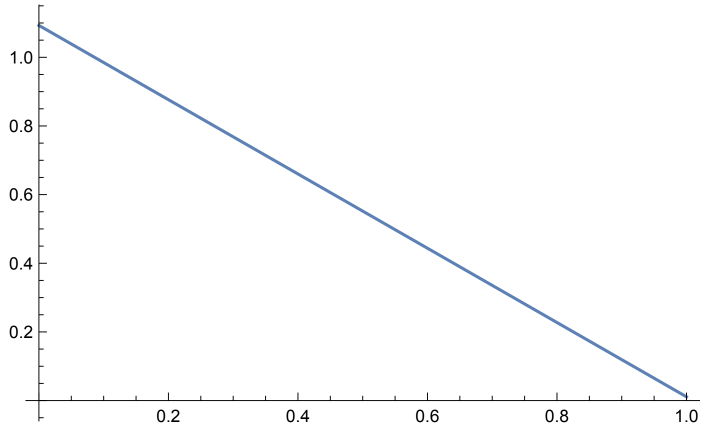


Mathematica hat den Least-Squares-Fit schon als fertige Routine eingebaut:

```
In[•]:= Fun = Fit[Data, {1, x}, x]
Out[•]= 1.09295 - 1.08197 x
```

```
In[•]:= P2 = Plot[Fun, {x, 0, 1}]
```

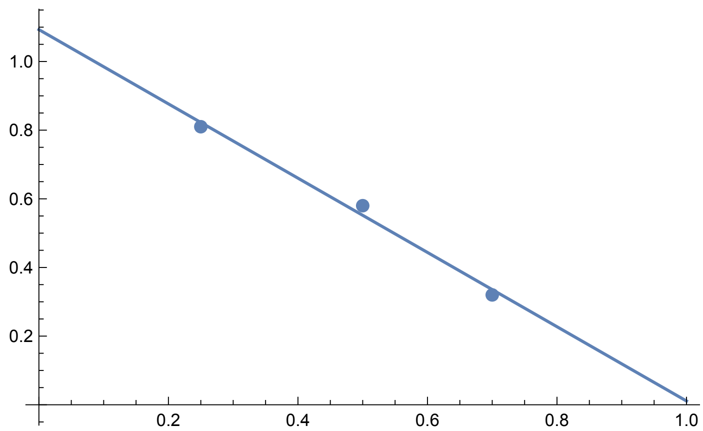
Out[•]=



Gemeinsame Darstellung gibt:

```
In[•]:= Show[P2, P1]
```

Out[•]=



Wir wollen den Rechengang aber explizit nachprüfen. Dazu berechnen wir die notwendigen

Größen MM=[1], Mx=[x] usw.:

```
In[•]:= MM = Sum[1, {i, 1, 3}];
In[•]:= Mx = Sum[Data[[i, 1]], {i, 1, 3}];
In[•]:= Mxx = Sum[Data[[i, 1]]^2, {i, 1, 3}];
In[•]:= My = Sum[Data[[i, 2]], {i, 1, 3}];
In[•]:= Mxy = Sum[Data[[i, 2]] * Data[[i, 1]], {i, 1, 3}];
```

Die Matrix wird daher

```
In[•]:= A = {{MM, Mx}, {Mx, Mxx}}
Out[•]= {{3, 1.45}, {1.45, 0.8025}}
```

und Invertierung gibt die gesuchten Parameter

```
In[•]:= Par = Inverse[A].{My, Mxy}
Out[•]= {1.09295, -1.08197}
```

Die statistischen Fehler der beiden Parameter ergeben sich zu

```
In[•]:= Epsilona = Sqrt[Mxx / Det[A]]
        Epsilonb = Sqrt[MM / Det[A]]
Out[•]= 1.62208
Out[•]= 3.13625
```

Die Fit-Funktion ist also:

```
In[•]:= FitFun[x_] = Par[[1]] + x * Par[[2]]
Out[•]= 1.09295 - 1.08197 x
```

Wir bestimmen D zu

```
In[•]:= ChiChi = Sum[(FitFun[Data[[i, 1]]] - Data[[i, 2]])^2 / sigma^2, {i, 1, 3}]
Out[•]= 0.00118361
```

Da D=0.00118361, korrigieren wir so, dass D=1 wird.

```
In[•]:= sigma = Sqrt[ChiChi];
```

Da der Faktor nur multiplikativ in die Berechnung von A und den Fehlern eingeht, erhalten wir:

```
In[•]:= KorrEpsa = Epsilona * sigma
        KorrEpsb = Epsilonb * sigma
Out[•]= 0.0558054
Out[•]= 0.107898
```

Damit ergeben sich Parameter und Fehler zu a=1.093(56), b=-1.082(108).

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.17

Bei einem Würfelexperiment erhalten Sie folgende Histogrammeinträge für die sechs möglichen

Werte: 20, 13, 15, 18, 14, 20. Treffen Sie eine Aussage über Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine Gleichverteilung handelt!

Lösungsweg

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

Zuerst die Daten:

```
In[•]:= W = {20, 13, 15, 18, 14, 20};
```

Wir bildet entsprechend (21.115) die mittlere quadratische Abweichung von erwartete Mittelwert 100/6:

```
In[•]:= A = Sum[(W[[i]] - 100/6)^2, {i, 1, 6}]/(100/6)
```

Out[•]= $\frac{71}{25}$

Für die gewünschten Zahlenwerte der χ^2
Verteilung (6 - 1 = 5 Freiheitsgrade!) benötigen wir die Pakete :

Nun lesen wir die Wahrscheinlichkeit, einen Wert <A zu finden, ab:

```
In[•]:= N[CDF[ChiSquareDistribution[5], A]]
Out[•]= 0.275363
```

oder, äquivalent:

```
In[•]:= Needs["HypothesisTesting`"]
In[•]:= ChiSquarePValue[A, 5]
Out[•]= OneSidedPValue → 0.275363
```

Nur zur Information: Ein 1-σ Intervall (Wahrscheinlichkeit 0.723597) rund um den Erwartungswert 5 hat die halbe Breite Sqrt[10]:

```
In[•]:= Print["(", N[5 - Sqrt[10]], ",", N[5 + Sqrt[10]], ")"]
(1.83772,8.16228)
```

Mit der Wahrscheinlichkeit 0.724 liegt also A eines solchen Experiments im Intervall (1.83772, 8.16228). Unser Experiment ergab den Wert 71/25=2.84, also einen vernünftigen Werte in diesem Intervall.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

21.18

Bei einem Würfelexperiment werfen Sie jeweils zwei Würfel und addieren die Augen. Sie wiederholen das Experiment 100-mal und erhalten folgende Histogrammeinträge für die 11 möglichen Werte

(2 – 12) : 0, 6, 8, 13, 10, 23, 16, 13, 5, 2, 4.

Welche Verteilung erwarten Sie? Treffen Sie eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um diese Verteilung handelt!

Lösungsweg

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

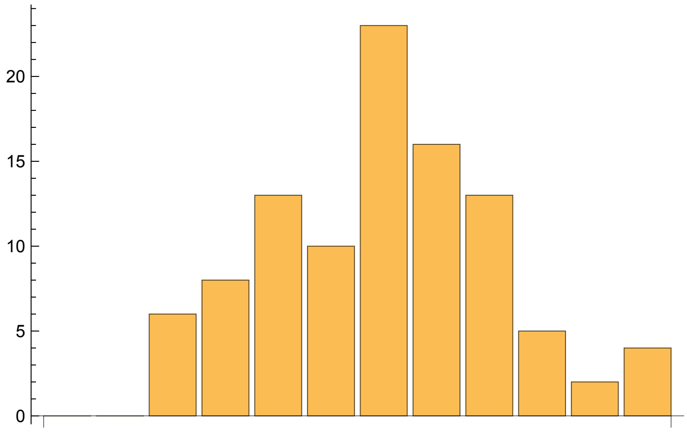
Wir füllen die Tabelle von Position 1 bis 12; da 1 aber verboten ist, verwenden wir diesen Wert nicht.

In[•]:=
```
R = {0, 0, 6, 8, 13, 10, 23, 16, 13, 5, 2, 4};
```

Wir verschaffen uns ein Bild von der Verteilung:

In[•]:=
```
BarChart[R]
```

Out[•]=



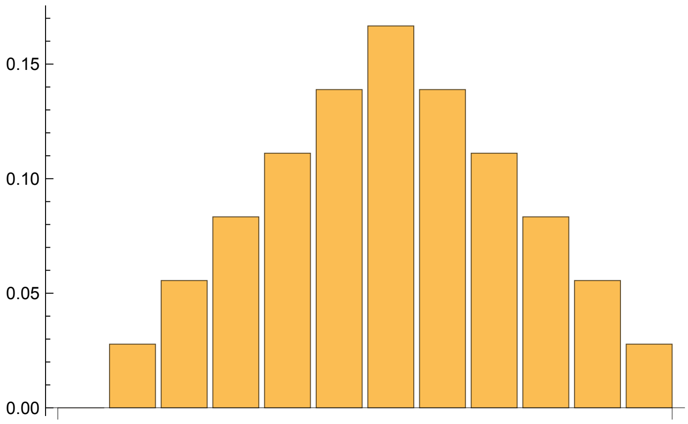
Die erwartete Verteilungsdichte hat Pyramidenform mit den Einträgen:

In[•]:=
```
Erwartung = Table[Min[i - 1, 13 - i] / 36, {i, 1, 12}]
```

Out[•]= $\left\{0, \frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}\right\}$

In[•]:=
```
BarChart[Erwartung]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
A = N[Sum[(R[[i]] - 100 * Erwartung[[i]]) ^2 / (100 * Erwartung[[i]]), {i, 2, 12}]]
```

Out[•]= 11.432

Die zuständige Verteilung für diesen Wert ist die χ^2
Verteilung für 11 Freiheitsgrade und daher Erwartujngswert 11. Es ist

In[•]:=
```
N[CDF[ChiSquareDistribution[11], A]]
```

Out[•]= 0.592187

und daher die Wahrscheinlichkeit einen Wert größer als A zu finden (1-0.59)=0.41. Ein 1-σ Intervall ist (6.31, 15.69).

In[ ]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```