

Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa `Limit` oder `Series`) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 3. Vektoren und Matrizen

3.1

Berechnen Sie folgende Determinanten

$$(a) \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 14 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

Matrizen werden in Mathematica als `Table` dargestellt und Determinanten mittels `Det[...]` berechnet. Wir werden hier daher die Rechnung nicht explizieren. Im Fall (b) allerdings ist die Sache einfach: Da es sich um eine Dreieck-Matrix handelt, ist die Determinante einfach das Produkt der Diagonalelemente,

$$(b) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \times 6 = 24 .$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.2

Berechnen Sie die Gleichung einer Ebene durch die Punkte (0,0,1), (1,1,1) und (5,1,0).

Lösungsweg

Dazu berechnen wir einfach die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Die sich ergebende Gleichung ist linear in x, y, z und beschreibt die gesuchte Ebene:

```
In[*]:= Det[{{x, y, z, 1}, {0, 0, 1, 1},
              {1, 1, 1, 1}, {5, 1, 0, 1}}] == 0
```

```
Out[*]:= 4 - x + y - 4 z == 0
```

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.3

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Cramerschen Regel:

(a)

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 3z &= 0 \\ 3x - 10y + 7z &= 13 \\ x + 5y + 3z &= -6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 12 \\ 47 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

(a)

Wir berechnen die notwendigen Determinanten:

```
In[*]:= DD = Det[{{3, 3, 3}, {3, -10, 7}, {1, 5, 3}}]
D1 = Det[{{0, 3, 3}, {13, -10, 7}, {-6, 5, 3}}]
D2 = Det[{{3, 0, 3}, {3, 13, 7}, {1, -6, 3}}]
D3 = Det[{{3, 3, 0}, {3, -10, 13}, {1, 5, -6}}]
```

```
Out[*]:= -126
```

```
Out[*]:= -228
```

```
Out[*]:= 150
```

```
Out[*]:= 78
```

Da DD ungleich 0 ist, erhalten wir daraus mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösungen:

```
In[*]:= Print["x=", D1/DD, " y=", D2/DD, " z=", D3/DD];
```

$$x = \frac{38}{21} \quad y = -\frac{25}{21} \quad z = -\frac{13}{21}$$

(b)

Die einzelnen Determinanten lauten

$$\text{In}[] := \text{DD} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{D1} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 14 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 5 & 2 \\ 47 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{D2} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 2 & 14 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 12 & 5 & 2 \\ 0 & 47 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{D3} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 14 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 12 & 2 \\ 0 & 9 & 47 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{D4} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 14 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 5 & 12 \\ 0 & 9 & 1 & 47 \end{pmatrix} \right]$$

Out[] = -210

Out[] = 0

Out[] = -1050

Out[] = -210

Out[] = -210

Nach der Cramerschen Regel ergibt sich eine Punktlösung:

In[] := Print["x=", D1/DD, " y=", D2/DD, " z=", D3/DD, " t=", D4/DD];

x=0 y=5 z=1 t=1

In[] := ClearAll["Global`*"];

3.4

Besprechen Sie die Lösbarkeitsklasse der folgenden Gleichungssysteme und lösen Sie sie, wenn das möglich ist.

$$(f) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

Alle Determinanten verschwinden:

```

In[*]:= A = {{1, 2, 5}, {-1, 2, 3}, {-1, 6, 11}}
DD = Det[A]
D1 = Det[{{0, 2, 5}, {1, 2, 3}, {2, 6, 11}}]
D2 = Det[{{1, 0, 5}, {-1, 1, 3}, {-1, 2, 11}}]
D3 = Det[{{1, 2, 0}, {-1, 2, 1}, {-1, 6, 2}}]

```

```
Out[*]:= {{1, 2, 5}, {-1, 2, 3}, {-1, 6, 11}}
```

```
Out[*]:= 0
```

```
Out[*]:= 0
```

```
Out[*]:= 0
```

```
Out[*]:= 0
```

Es ist $\text{Rang}(A)=\text{Rang}(M)=2$, daher ist die Lösung eine 1-parametrische Schar. Wir setzen den Parameter $t=z$ und lösen mit Hilfe der beiden ersten (offenbar unabhängigen) Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ 1-3t \end{pmatrix}$$

```

In[*]:= DD = Det[{{1, 2}, {-1, 2}}]
D1 = Det[{{-5 t, 2}, {1-3 t, 2}}]
D2 = Det[{{1, -5 t}, {-1, 1-3 t}}]

```

```
Out[*]:= 4
```

```
Out[*]:= -2 - 4 t
```

```
Out[*]:= 1 - 8 t
```

```

In[*]:= Print["x[t]=", D1/DD];
Print["y[t]=", D2/DD];
Print["z[t]=", t];

```

$$x[t] = \frac{1}{4} (-2 - 4t)$$

$$y[t] = \frac{1}{4} (1 - 8t)$$

$$z[t] = t$$

Eine alternativer Lösungsweg mit Hilfe von *Mathematica* Funktionen wäre folgendermaßen:
Man berechnet eine spezielle Lösung X_0 ,

```

In[*]:= X0 = LinearSolve[A, {0, 1, 2}]
A.X0

```

```
Out[*]:= {-1/2, 1/4, 0}
```

```
Out[*]:= {0, 1, 2}
```

und den so genannten Nullraum.

```
In[*]:= XT = NullSpace[A][[1]]
```

```
Out[*]:= {-1, -2, 1}
```

Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Summe

```
In[ ]:= Solution = X0 + XT * t
```

```
Out[ ]:= { -1/2 - t, 1/4 - 2 t, t }
```

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.5

Zeigen Sie, dass Pauli-Matrizen (vgl. (5.54)) die folgenden Eigenschaften haben:

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2, \quad \sigma_i^2 = 1.$$

Lösungsweg

Die Pauli-Matrizen haben die Form

```
In[ ]:=  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ 
```

Und wir berechnen explizit durch Multiplikation:

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_2 \cdot \sigma_3$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_3 \cdot \sigma_1$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_1 \cdot \sigma_1$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_2 \cdot \sigma_2$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= MatrixForm[ $\sigma_3 \cdot \sigma_3$ ]
```

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.6

Sind die folgenden Behauptungen richtig?

- (a) Matrizen sind kommutativ bezüglich der Addition.
- (b) Matrizen sind kommutativ bezüglich der Multiplikation.

- (c) Matrizen sind kommutativ, wenn sie singular sind.
- (d) Matrizen sind nicht invertierbar, wenn sie singular sind.
- (e) Drehmatrizen sind immer invertierbar.

Lösungsweg

Wir werden hier nur ein Beispiele für diejenigen Aussagen geben, die falsch sind (Antwort: "nein").

(b)

Nein, die Reihenfolge der Multiplikation zweier Matrizen ist im allgemeinen nicht vertauschbar. Es ist also oft $A.B \neq B.A$, wie im folgenden Beispiel:

$$\text{In[*]:= } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

`In[*]:= MatrixForm[A.B]`

`Out[*]//MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

`In[*]:= MatrixForm[B.A]`

`Out[*]//MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

(c)

Singularität hat nichts mit Kommutativität (Vertauschbarkeit bei Multiplikation) zu tun. Wie im Fall (b) ist auch hier die Antwort "nein". Beispiel zweier singularer Matrizen:

$$\text{In[*]:= } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

`In[*]:= MatrixForm[A.B]`

`Out[*]//MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

`In[*]:= MatrixForm[B.A]`

`Out[*]//MatrixForm=`

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`In[*]:= ClearAll["Global`*"];`

3.7

Sind die folgenden Behauptungen richtig? Determinanten ändern ihren Wert nicht, wenn man:

- (a) Die Reihenfolge der Zeilen vertauscht.
- (b) Eine Zeile mit einer Konstanten multipliziert.
- (c) Alle Zeilen mit den Spalten vertauscht (transponiert).
- (d) Zu einer Zeile eine andere Zeile addiert.
- (e) Zu einer Spalte eine andere Spalte addiert.
- (f) Eine Zeile mit einer anderen Zeile elementweise multipliziert.
- (g) Zwei Zeilen gleichzeitig mit -1 multipliziert.

Lösungsweg

Die meisten dieser Fragen werden in M.5.2 beantwortet. Wir geben hier nur Gegenbeispiel zu den Aussagen, die mit "nein" beantwortet werden müssen.

Die Antwort zu (g) ist "ja"; die Aussage ist richtig, da jeder Multiplikation einer Zeile mit -1 das Vorzeichen der Determinante umkehrt. Wenn man also zwei Zeilen mit -1 multipliziert, bleibt die Determinante unverändert.

(a) nein

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= 2
```

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= -2
```

(b) nein

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= 2
```

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= 4
```

(f) nein

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= 2
```

```
In[ ]:= Det[ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ]
```

```
Out[ ]:= 0
```

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.8

Finden Sie die inverse Matrix zu

(a) $\begin{pmatrix} 8 & -\frac{2}{3} \\ -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Lösungsweg

(a)

$$\text{In[*]:= } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{2}{3} \\ -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

Die Matrix der Kofaktoren ist

$$\text{In[*]:= } \mathbf{CT} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ \frac{2}{3} & 8 \end{pmatrix};$$

Die Determinante von A lautet

$$\text{In[*]:= } \mathbf{DA} = 8 * \frac{1}{2} - (-4) * \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Out[*]= } \frac{4}{3}$$

Die inverse Matrix ist die transponiert von CT, geteilt durch die Determinante von A:

$$\text{In[*]:= } \mathbf{Ainv} = \text{Transpose}[\mathbf{CT}] / \mathbf{DA}$$

$$\text{Out[*]= } \left\{ \left\{ \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right\}, \{3, 6\} \right\}$$

$$\text{In[*]:= } \text{MatrixForm}[\mathbf{Ainv}]$$

$$\text{Out[*]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir kontrollieren:

$$\text{In[*]:= } \text{MatrixForm}[\mathbf{A.Ainv}]$$

$$\text{Out[*]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\text{In[*]:= } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[*]= } \left\{ \{1, 0, 0\}, \{0, \cos \alpha, -\sin \alpha\}, \{0, \sin \alpha, \cos \alpha\} \right\}$$

Dies ist eine Drehmatrix (orthogonale Matrix). Sie beschreibt eine Drehung mit der x-Achse als Drehachse und dem Drehwinkel α . Die transponierte Matrix (oder, gleichwertig, Ersetzung von α durch $-\alpha$) ist die inverse Matrix. Wir kontrollieren:

$$\text{In[*]:= } \text{MatrixForm} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[a] & -\sin[a] \\ 0 & \sin[a] & \cos[a] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[a] & \sin[a] \\ 0 & -\sin[a] & \cos[a] \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{Out[*]//MatrixForm=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[a]^2 + \sin[a]^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos[a]^2 + \sin[a]^2 \end{pmatrix}$$

Wegen $\cos[a]^2 + \sin[a]^2 = 1$ ist das natürlich die Einheitsmatrix.

(c)

$$\text{In}[*]:= \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos[a]^2 & \sin[a] & 0 \\ \sin[a] & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

(Die Determinante hat den Wert -2, die Matrix ist also nicht singulär.)

Mathematica liefert:

$$\text{In}[*]:= \text{MatrixForm}[\text{Simplify}[\text{Inverse}[\mathbf{A}]]]$$

$$\text{Out}[*]/\text{MatrixForm} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin[a] & 0 \\ \sin[a] & -\cos[a]^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{In}[*]:= \text{ClearAll}["Global`*"];$$

3.9

Sind folgende Funktionen voneinander linear abhängig?

- (a) $f_1 = 2x + y + z$, $f_2 = 2x + 4y + 2z$, $f_3 = 3x + z$;
 (b) $f_1 = \sin 2x$, $f_2 = \sin 4x$, $f_3 = \sin 8x$;
 (c) $f_1 = e^{ix}$, $f_2 = \cos x$, $f_3 = 3 \sin x$;
 (d) $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Lösungsweg

Um dies zu beantworten, kann man entweder die Wronski-Determinante berechnen, oder etwas nachdenken.

(a)

$$\text{In}[*]:= \mathbf{f}_1 = 2x + y + z; \mathbf{f}_2 = 2x + 4y + 2z; \mathbf{f}_3 = 3x + z;$$

Die drei in x, y, und z linearen Ausdrücke sind dann voneinander linear abhängig, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet; das ist uns von der Lösung von linearen Gleichungssystemen her bekannt.

Wir berechnen also

$$\text{In}[*]:= \text{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\text{Out}[*]= 0$$

und finden lineare Abhängigkeit!

Man kann zeigen, dass $4f_1 - f_2 = 2f_3$.
$$\text{In}[*]:= \text{Simplify}[4\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2]$$

$$\text{Out}[*]= 2(3x + z)$$

(b)

Wir werden in Kap.12 sehen, dass diese Funktionen die Basisfunktionen der Fourierreihe sind, also sicher linear unabhängig. Das beweist auch die Wronski-Determinante:

```
In[*]:= DD = Det[
$$\begin{pmatrix} \sin[2x] & \sin[4x] & \sin[8x] \\ 2 \cos[2x] & 4 \cos[4x] & 8 \cos[8x] \\ -4 \sin[2x] & -16 \sin[4x] & -64 \sin[8x] \end{pmatrix}$$
]
```

```
Out[*]:= 96 Cos[8 x] Sin[2 x] Sin[4 x] -  
240 Cos[4 x] Sin[2 x] Sin[8 x] + 96 Cos[2 x] Sin[4 x] Sin[8 x]
```

```
In[*]:= Simplify[DD]
```

```
Out[*]:= -768 Cos[2 x] Sin[2 x]^6
```

Dieser Ausdruck ist ungleich 0.

(c)

Wegen der Eulerschen Formel (2.27)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

gilt also $f_1 = f_2 + \frac{1}{3}f_3$, also lineare Abhängigkeit. Die Wronski-Determinante wird also auch null sein, wenn man sie berechnet.

(d)

```
In[*]:= P0 = 1; P1 = x; P2 =  $\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$ ; P3 =  $\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$ ;
```

Dies sind (wie in Kap. 15 näher behandelt wird) die so genannten Legendreschen Polynome. Sie sind linear unabhängige Funktionen. Wir berechnen zur Kontrolle die Wronski-Determinante.

```
In[*]:= Zeile1 = {P0, P1, P2, P3}
```

```
Out[*]:= {1, x, - $\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}$ , - $\frac{3x}{2} + \frac{5x^3}{2}$ }
```

```
In[*]:= Zeile2 = D[Zeile1, {x, 1}]
```

```
Out[*]:= {0, 1, 3x, - $\frac{3}{2} + \frac{15x^2}{2}$ }
```

```
In[*]:= Zeile3 = D[Zeile1, {x, 2}]
```

```
Out[*]:= {0, 0, 3, 15x}
```

```
In[*]:= Zeile4 = D[Zeile1, {x, 3}]
```

```
Out[*]:= {0, 0, 0, 15}
```

```
In[*]:= Det[{Zeile1, Zeile2, Zeile3, Zeile4}]
```

```
Out[*]:= 45
```

(Man beachte: Das ist hier einfach das Produkt der Diagonalelemente!)

Zum Abschluss wollen wir noch eine Mathematica-Funktion definieren, die zu einem Satz von Funktionen die Wronski-Determinante ausrechnet.

```
In[*]:= Wronski[F_, x_] := Module[{nf, A, DtA},  
  nf = Length[F];  
  A = Evaluate[Table[D[F, {x, i}], {i, 0, nf - 1}]];  
  DtA = Simplify[Det[A]]; Return[DtA];
```

Diese Funktion hat zwei Parameter: der erste ist eine Liste der Funktionen, der zweite ist der Vari-

ablenname. Wir bestimmen damit noch einmal die Wronski-Determinante für dieses Beispiel.

```
In[ ]:= Zeile1
```

$$\text{Out[]} = \left\{ 1, x, -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}, -\frac{3x}{2} + \frac{5x^3}{2} \right\}$$

```
In[ ]:= Wronski[Zeile1, x]
```

```
Out[ ]:= 45
```

Für das Beispiel (c) liefert unser Programm

```
In[ ]:= Wronski[{Exp[I x], Cos[x], 3 Sin[x]}, x]
```

```
Out[ ]:= 0
```

wie schon in (c) festgestellt.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.10

Die Elemente einer Basis im $\mathbb{R}^3$, ausgedrückt in kartesischen Koordinaten, seien $(1,1,0)/\sqrt{2}$, $(1,-1,0)/\sqrt{2}$ und $(0,0,1)$. Berechnen Sie in dem neuen Basissystem die Komponenten der kartesischen Vektoren

(a) $(1,0,1)$, (b) $(2,2,2)$ und (c) $(-1,1,1)$.

Geben Sie eine Transformationsregel für den allgemeinen Fall an.

Lösungsweg

Die Elemente der neuen Basis sind

```
In[ ]:= e[1] = {1, 1, 0} / Sqrt[2];
```

```
e[2] = {1, -1, 0} / Sqrt[2];
```

```
e[3] = {0, 0, 1};
```

Auch diese Basis ist eine orthogonale mit zueinander senkrechte, normierten Vektoren:

```
In[ ]:= A = Table[e[i].e[j], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]
```

```
Out[ ]:= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

Wenn also ein Vektor in dieser Basis dargestellt wird,

$$\mathbf{avec} = c_1 \mathbf{e}[1] + c_2 \mathbf{e}[2] + c_3 \mathbf{e}[3]$$

dann kann man die Komponenten c_i durch Skalarproduktbildung mit $\mathbf{e}[i]$ bestimmen,

$$c_i = \mathbf{avec} \cdot \mathbf{e}[i]$$

Die Rechnung zu den drei Fällen ist daher einfach.

(a)

```
In[ ]:= avec = {1, 0, 1};
```

```
In[*]:= avec.{e[1], e[2], e[3]}
```

```
Out[*]:= { 1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 1 }
```

(b)

```
In[*]:= avec = {2, 2, 2};
```

```
In[*]:= avec.{e[1], e[2], e[3]}
```

```
Out[*]:= { 2*sqrt(2), 0, 2 }
```

(c)

```
In[*]:= avec = {-1, 1, 1};
```

```
In[*]:= avec.{e[1], e[2], e[3]}
```

```
Out[*]:= { 0, -sqrt(2), 1 }
```

HINWEIS: Im allgemeinen Fall ist die Basis nicht orthogonal und nicht normiert. Man erhält dann ein Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten.

$$\mathbf{avec} = \sum_i \mathbf{e}[i] c_i$$

$$\mathbf{avec} \cdot \mathbf{e}[j] = \sum_i (\mathbf{e}[i] \cdot \mathbf{e}[j]) c_i$$

Die Elemente $(\mathbf{e}[i] \cdot \mathbf{e}[j])$ definieren eine Matrix, die wir oben A genannt haben. Wenn die Basiselemente voneinander linear unabhängig sind, dann ist die Matrix invertierbar und wir erhalten als Lösung des Gleichungssystems

$$c_i = (A^{-1})_{ij} (\mathbf{avec} \cdot \mathbf{e}[j])$$

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.11

Schreiben Sie die Gleichung der Geraden, die durch A geht und senkrecht auf die von A, B und C gebildete Ebene steht:

$A = (1, 2, 2)$, $B = (-1, 0, 2)$, $C = (1, 5, -1)$.

Lösungsweg

Lösungsvariante 1:

Wir bestimmen die Gleichung der Ebene in impliziter Form und erkennen daraus die orthogonale Richtung. Diese und der Punkt A definieren die gesuchte Geradengleichung.

Die Ebenengleichung ist nach (5.19) am elegantesten so zu berechnen:

```
In[*]:= Ebene = Det[{{x, y, z, 1}, {1, 2, 2, 1}, {-1, 0, 2, 1}, {1, 5, -1, 1}}]
```

```
Out[*]:= 18 + 6 x - 6 y - 6 z
```

Der gemeinsame Faktor 6 ist unerheblich und die Ebenengleichung lautet daher

$$x - y - z = -3$$

Die Vorfaktoren geben die Richtung des Normalenvektors an,

$$\mathbf{n} = (1, -1, -1)$$

und die Geradengleichung lautet daher

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t .$$

Lösungsvariante 2

Der Normalenvektor kann als äußeres Produkt der Verbindungsvektore $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ berechnet werden

```
In[*]:= Av = {1, 2, 2}; Bv = {-1, 0, 2}; Cv = {1, 5, -1};
```

```
In[*]:= AB = Bv - Av
```

```
Out[*]:= {-2, -2, 0}
```

```
In[*]:= AC = Cv - Av
```

```
Out[*]:= {0, 3, -3}
```

```
In[*]:= n = Cross[AB, AC]
```

```
Out[*]:= {6, -6, -6}
```

Damit ist auch (1,-1,-1) ein geeigneter Normalenvektor und die Gleichung einer Geraden durch den Punkt A lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t .$$

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.14

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{A}=(3,6,9)$ und $\mathbf{B}=(-2,3,1)$!

Lösungsweg

Das innere Produkt zwischen zwei Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ hat den Wert

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha .$$

Daher ist

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} .$$

In unsere Fall ergibt sich

```
In[*]:= A = {3, 6, 9}; B = {-2, 3, 1};
```

```
A.B
```

```
Out[*]:= 21
```

```
In[ ]:= ABetrag = Sqrt[A.A]
```

```
Out[ ]:= 3 √14
```

```
In[ ]:= BBetrag = Sqrt[B.B]
```

```
Out[ ]:= √14
```

```
In[ ]:= CosAlpha = A.B / (ABetrag * BBetrag)
```

```
Out[ ]:= 1/2
```

```
In[ ]:= Alpha = ArcCos[1/2]
```

```
Out[ ]:= π/3
```

...oder 60 Grad.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

3.15

Schreiben Sie die Gleichung

$$21x^2 + 31y^2 + 10\sqrt{3}xy + 9z^2 = 144$$

in Matrixform; bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix und damit die Hauptachsenabschnitte des entsprechenden Drehellipsoids.

Lösungsweg

Wir müssen versuchen, diese quadratische Form mit Hilfe einer reell symmetrischen Matrix A anzuschreiben,

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 144$$

In unserem Beispiel lautet A daher:

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 5\sqrt{3} & 0 \\ 5\sqrt{3} & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

Diese Matrix wird (da reell symmetrisch!) reelle Eigenwerte haben und ihr Eigensystem definiert die unitäre Matrix U, mit deren Hilfe A diagonalisiert wird.

Eigensystem[A]

$$\{\{9, 16, 36\}, \{0, 0, 1\}, \{-\sqrt{3}, 1, 0\}, \{\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0\}\}$$

Die Eigenwerte {9,16,36} sind positiv, es handelt sich also um eine positiv definite quadratische Form!

Die Eigenvektoren müssen noch auf Betrag 1 normiert werden und liefern dann die Spalten der Matrix U:

$$U = \text{Transpose}[\{\{0, 0, 1\}, \{-\sqrt{3}, 1, 0\}/2, \{\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, 0\}\sqrt{3}/2\}];$$

MatrixForm[U]

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen uns vergewissern, dass diese Matrix tatsächlich A diagonalisiert:

Conjugate[Transpose[U]].A.U

$$\{\{9, 0, 0\}, \{0, 16, 0\}, \{0, 0, 36\}\}$$

(Das komplex Konjugieren ist hier eigentlich unnötig, da U reell ist. Wir haben es der Vollständigkeit wegen aber explizit angeschrieben.)

Wegen

$$\mathbf{x}^\dagger \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 144 \rightarrow$$

$$\mathbf{x}^\dagger \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{x} = 144$$

$$(\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{x})^\dagger \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{x}) = 144$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{U}^\dagger \cdot \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}')^\dagger \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' = 144$$

lauten die neuen Koordinaten, in denen A diagonal ist,

$$(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s) =$$

In[]:= Conjugate[Transpose[U]].{x, y, z}

Out[]:= Conjugate[Transpose[U]].{x, y, z}

$$\{z, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\}$$

und die Hauptachsenabschnitte des Drehellipsoids sind die inversen Quadratwurzeln der Eigenwert, also 1/3, 1/4, und 1/6.

In[]:= ClearAll["Global`*"];