

Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 4. Differenzialrechnung

4.1

Bilden Sie jeweils die Ableitung von:

- (a) $y = 2 \sin x$
- (b) $y = (\sin x)^{\cos x}$
- (c) $y = \sin^2 x$
- (d) $y = (\ln x) \cdot \ln(\ln x) - \ln x$
- (e) $y = \sin 2x$
- (f) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
- (g) $y = \sinh x^2$
- (h) $y = \log_a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$

Lösungsweg

Da es sich hier um bloße Differenziationsübungen (Ketten- und Produktregel) handelt, die keinerlei besondere Tricks brauchen, verwenden wir einfach die uns von Mathematica angebotene Differenziationsfunktion.

(a) $y = 2 \sin x$

`In[ ]:= D[2 Sin[x], x]`

`Out[ ]:= 2 Cos[x]`

$$(b) \quad y = (\sin x)^{\cos x}$$

In[]:= **D[Sin[x]^{Cos[x]}, x]**

Out[]:= Sin[x]^{Cos[x]} (Cos[x] Cot[x] - Log[Sin[x]] Sin[x])

In[]:= **Simplify[Cos[x]² Sin[x]^{-1+Cos[x]} - Log[Sin[x]] Sin[x]^{1+Cos[x]}]**

Out[]:= Sin[x]^{-1+Cos[x]} (Cos[x]² - Log[Sin[x]] Sin[x]²)

$$(c) \quad y = \sin^2 x$$

In[]:= **D[Sin[x]^2, x]**

Out[]:= 2 Cos[x] Sin[x]

In[]:= **Simplify[2 Cos[x] Sin[x]]**

Out[]:= Sin[2 x]

$$(d) \quad y = (\ln x) \cdot \ln(\ln x) - \ln x$$

In[]:= **D[Log[x] Log[Log[x]] - Log[x], x]**

Out[]:= $\frac{\text{Log[Log[x]]}}{x}$

$$(e) \quad y = \sin 2x$$

In[]:= **D[Sin[2 x], x]**

Out[]:= 2 Cos[2 x]

$$(f) \quad y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

In[]:= **D[Sqrt[1 + Sqrt[x]], x]**

Out[]:= $\frac{1}{4 \sqrt{1 + \sqrt{x}} \sqrt{x}}$

$$(g) \quad y = \sinh x^2$$

In[]:= **D[Sinh[x^2], x]**

Out[]:= 2 x Cosh[x^2]

$$(h) \quad y = \log_a \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$$

In[]:= **Simplify**[**D**[**Log**[**a**, $\frac{a+x}{a-x}$], **x**]]

Out[]:=
$$\frac{2a}{(a^2 - x^2) \text{Log}[a]}$$

Tip: Zerlegen Sie die Funktion in

$$\log_a \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = \log_a (x+a) - \log_a (x-a)$$

und differenzieren Sie erst dann.

In[]:= **ClearAll**["Global`*"];

4.2

Berechnen Sie unter Verwendung von (4.16) die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

- (a) $y = \ln x$,
- (b) $y = \arccos x$,
- (c) $y = \operatorname{arsinh} x$,
- (d) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$.

Lösungsweg

Die angesprochene Gleichung (4.16) erlaubt die Berechnung der Ableitung einer Funktion durch die ihrer Umkehrfunktion:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}$$

falls (in dieser Schreibweise) $\frac{dx}{dy} \neq 0$.

(a)

$$y = \ln x$$

$$\rightarrow x = e^y, \quad \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y}$$

Da wir $y'(x)$ suchen, müssen wir noch y durch x ausdrücken:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = e^{-y} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

(b)

$$y = \arccos x$$

$$\rightarrow x = \cos y, \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Dies gilt nur dort, wo $\sin y \neq 0$, also zum Beispiel im offenen Intervall $(0, \pi)$. Dort ist auch der Hauptwert von $\arccos x$ (mit $-1 < x < 1$) definiert.

(c) verläuft wie (b).

(d)

$$\begin{aligned} y &= \ln(1 + \sqrt{x}) \\ \rightarrow x &= (e^y - 1)^2 = e^{2y} - 2e^y + 1 \\ \frac{dx}{dy} &= 2e^{2y} - 2e^y \\ \rightarrow y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e^{2y} - 2e^y} \\ &= \frac{1}{2(1 + \sqrt{x})^2 - 2(1 + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2x + 2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.4

Finden Sie mit Hilfe der Methoden aus Abschnitt 4.3 die totale Ableitung $\frac{dr}{ds}$, wenn

$$r = e^{-p^2 - q^2}, \quad p = e^s \text{ und } q = e^{-s}.$$

Lösungsweg

Es geht hier um 5 Variablen und drei voneinander unabhängige Gleichungen. Im Grunde handelt es sich also um eine Beziehung zwischen nur zwei Variablen (einer abhängigen und einer unabhängigen), die man frei wählen kann. Da $\frac{dr}{ds}$ gesucht ist, werden das die Variablen r und s sein.

Die Gleichungen sind hier nichtlinear in den Variablen, man kann also nicht erwarten, sie tatsächlich auf eine Gleichung mit nur zwei Variablen zu reduzieren. Auf dem linearisierten Niveau der totalen Differenziale funktioniert das jedoch!

Dazu bilden wir die totalen Differenziale der drei Gleichungen. Es ergeben sich drei Gleichungen, die linear in dr , ds , dp und dq sind. Wir lösen sie dann nach dr und ds auf und erhalten so die gewünschte Ableitung als Vorfaktor.

Mathematica hat eine Funktion zur Berechnung des totalen Differenzials vorgesehen, die wir der Einfachheit wegen gleich hier verwenden.

```
In[ ]:= GlgA = Dt[r == E^-p^2 - q^2]
```

```
Out[ ]:= Dt[r] == E^-p^2 - q^2 (-2 p Dt[p] - 2 q Dt[q])
```

```
In[ ]:= GlgB = Dt[p == E^s]
```

```
Out[ ]:= Dt[p] == E^s Dt[s]
```

In[*]:= $\text{GlgC} = \text{Dt}[q == E^{-s}]$

Out[*]:= $\text{Dt}[q] == -e^{-s} \text{Dt}[s]$

Wir können die Gleichungen lösen, indem wir aus GlgB und GlgC die totalen Differenziale dp und dq in GlgA einsetzen.

In[*]:= $\text{GlgA} /. \{\text{Dt}[p] \rightarrow E^s \text{Dt}[s], \text{Dt}[q] \rightarrow -E^{-s} \text{Dt}[s]\}$

Out[*]:= $\text{Dt}[r] == e^{-p^2-q^2} (-2 e^s p \text{Dt}[s] + 2 e^{-s} q \text{Dt}[s])$

Der Vorfaktor zu ds ist die gesuchte Ableitung:

$$\frac{dr}{ds} = 2 E^{-p^2-q^2} (E^{-s} q - E^s p)$$

Wir vereinfachen sie noch durch Verwendung der ursprünglichen Gleichungen:

$$\frac{dr}{ds} = 2 E^{-p^2-q^2} (E^{-2s} - E^{2s}).$$

In[*]:= `ClearAll["Global`*"];`

4.10

Berechnen Sie für $x^y = y^x$ die Ableitung $\frac{dy}{dx}$.

Lösungsweg

Es gilt $y^x = \exp(x \ln y)$ und daher kann die Gleichung als wie folgt angeschrieben werden:

$$\exp(y \ln x) = \exp(x \ln y)$$

Wir bilden das totale Differenzial,

$$\begin{aligned} d[\exp(y \ln x)] &= d[\exp(x \ln y)] \\ \frac{y}{x} \exp(y \ln x) dx + (\ln x) \exp(y \ln x) dy &= \\ (\ln y) \exp(x \ln y) dx + \frac{x}{y} \exp(x \ln y) dy. \end{aligned}$$

Trennen der Terme zu dx und dy ergibt

$$\begin{aligned} \left[(\ln x) \exp(y \ln x) - \frac{x}{y} \exp(x \ln y) \right] dy \\ = \left[(\ln y) \exp(x \ln y) - \frac{y}{x} \exp(y \ln x) \right] dx \end{aligned}$$

Daraus finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^y y - x y^x \text{Log}[y])}{x(x y^x - x^y y \text{Log}[x])}.$$

.Mittels *Mathematica* schreibt man

In[*]:= $\text{D}[y^x, x] \text{dx} + \text{D}[y^x, y] \text{dy} == \text{D}[x^y, x] \text{dx} + \text{D}[x^y, y] \text{dy}$

Out[*]:= $\text{dy } x y^{-1+x} + \text{dx } y^x \text{Log}[y] == \text{dx } x^{-1+y} y + \text{dy } x^y \text{Log}[x]$

In[*]:= **Solve**[% , dy]

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ dy \rightarrow \frac{dx \, y \left(x^y y - x y^x \text{Log}[y] \right)}{x \left(x y^x - x^y y \text{Log}[x] \right)} \right\} \right\}$$

In[*]:= **Simplify** $\left[-\frac{y \left(-x^y y + x y^x \text{Log}[y] \right)}{x \left(x y^x - x^y y \text{Log}[x] \right)} \right]$

$$\text{Out[*]} = \frac{y \left(x^y y - x y^x \text{Log}[y] \right)}{x \left(x y^x - x^y y \text{Log}[x] \right)}$$

Dieses Ergebnis können wir mit Hilfe der ursprünglichen Gleichung (die ja weiterhin gilt) vereinfachen:

In[*]:= **Simplify** $\left[\frac{y \left(x^y y - x y^x \text{Log}[y] \right)}{x \left(x y^x - x^y y \text{Log}[x] \right)} /. x^y \rightarrow y^x \right]$

$$\text{Out[*]} = \frac{y \left(y - x \text{Log}[y] \right)}{x \left(x - y \text{Log}[x] \right)}$$

In[*]:= **ClearAll**["Global`*"];

4.12

Berechnen Sie (dV/dp), wenn

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = C$$

(Isotherme für reale Gase, a, b konstant) mit konstantem C.

Lösungsweg

Diese Terme korrigieren die Gleichung für ideales Gas (p V= konstant) in Hinblick auf z.B. nichtverschwindendes Volumen der beteiligten Gasmoleküle.

Wir berechnen das totale Differenzial,

In[*]:= **Dt** $\left[\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) \right] /. \{Dt[a] \rightarrow 0, Dt[b] \rightarrow 0\}$

$$\text{Out[*]} = \left(p + \frac{a}{V^2} \right) Dt[V] + (-b + V) \left(Dt[p] - \frac{2 a Dt[V]}{V^3} \right)$$

und sortieren nach dp=Dt[p] und dV=Dt[V].

$$\left(p + \frac{a}{V^2} + (b - V) \frac{2 a}{V^3} \right) Dt[V] = (b - V) Dt[p]$$

Daraus sehen wir

$$\frac{dV}{dp} = \frac{b - V}{p + \frac{a}{V^2} + (b - V) \frac{2a}{V^3}} = \frac{V^3 (b - V)}{p V^3 + 2 a b - a V}.$$

In[]:= ClearAll["Global`*"];

4.14

Wie lautet ein mit Hilfe des totalen Differenzials bestimmter Näherungsausdruck für $\frac{\arctan 0.98}{10.1}$?

Lösungsweg

Offenbar liegt dieser Wert in der Nähe des uns analytisch bekannten Wertes $\frac{\arctan 1}{10} = \frac{\pi}{40}$. Wir bilden zur näherungsweisen Abschätzung der Differenz also das totale Differenzial von $\frac{\arctan x}{y}$:

In[]:= Dt[ArcTan[x] / y]

Out[]:=
$$\frac{Dt[x]}{(1+x^2)y} - \frac{ArcTan[x] Dt[y]}{y^2}$$

Der gesuchte Näherungsausdruck ist daher

$$\text{Näherungswert} = \frac{\pi}{40} + \frac{Dt[x]}{(1+x^2)y} - \frac{ArcTan[x] Dt[y]}{y^2}$$

und an der Stelle $x=1$, $dx=-0.02$, $y=10$, $dy=0.1$ erhalten wir

In[]:=
$$\frac{\pi}{40} + \frac{-0.02}{(1+1)10} - \frac{\frac{\pi}{4} 0.1}{100}$$

Out[]:= 0.0767544

Das ist, auf 5 Stellen gerundet,

In[]:= 0.07854 - 0.00179

Out[]:= 0.07675

(Der exakte Wert ist 0.07676...)

In[]:= ClearAll["Global`*"];

4.19

Entwickeln Sie

(a) $f(x, y) = x y^2 + 2 x^2 + 1$ um den Punkt $(1, 2)$,

(b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$ um den Punkt $(1, 0)$

in eine Potenzreihe bis zu Gliedern zweiter Ordnung.

Lösungsweg

(a)

Dies ist sehr einfach zu lösen, da es sich ja um ein Polynom handelt, wir also nicht einmal Ableitun-

gen berechnen müssen, sondern einfach auf ein Polynom in (x-1) und (y-2) umschreiben.

Wir führen (als Zwischenschritt) die Variablen

$$r = x - 1, \text{ also } x = r + 1$$

$$s = y - 2, \text{ also } y = s + 2$$

ein und substituieren in das Polynom.

In[]:= **Expand**[x y² + 2 x² + 1 /. {x -> r + 1, y -> s + 2}]



MakeExpression: TextForm in MakeExpression[FormBox[RowBox[{Expand, [, RowBox[{RowBox[{<<5>>}],
/., RowBox[{<<3>>}]}],]}], TextForm], TextForm] is not a box formatting type. A box formatting type is any
member of \$BoxForms.

$$7 + 8r + 2r^2 + 4s + 4rs + s^2 + rs^2$$

Damit - durch Rückeinsetzen - erhalten wir die gesuchte Potenzreihe in (x-1) und (y-2) als

$$7 + 8(x - 1) + 4(y - 2) + 2(x - 1)^2$$



(b)

Man kann natürlich die Taylorformel verwenden;

statt dessen verwenden wir eine Abkürzung. Wir erkennen,

dass in der y - Variable nur der Term y² beiträgt und wir können

die Reihe daher als Produkt von y² und der Reihe für 1/x³ berechnen. Es ist

$$\frac{1}{x^3} = 1 - 3(x - 1) + 6(x - 1)^2 + O[x - 1]^3$$

mit dem Konvergenzintervall 0 < x < 2. Daraus folgt unser Endergebnis

$$\frac{y^2}{x^3} = y^2 - 3(x - 1)y^2 + 6(x - 1)^2 y^2 + O[(x - 1)^3 y^2]$$

mit dem gemeinsamen Konvergenzbereich 0 < x < 2, y ∈ ℝ.

Wenn wir die eingebaute Mathematica Funktion zur Reihenentwicklung verwenden, erhalten wir das prinzipiell richtige Ergebnis

In[]:= **Series**[$\frac{y^2}{x^3}$, {x, 1, 2}, {y, 0, 2}]

Out[]:= (y² + O[y]³) + (-3 y² + O[y]³) (x - 1) + (6 y² + O[y]³) (x - 1)² + O[x - 1]³

in dem allerdings das explizite Verschwinden aller Term O(y³) nicht berücksichtigt wird.

In[]:= **ClearAll**["Global`*"];

4.21

Eine Funktion heißt homogen n-ten Grades, wenn

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

gilt (zum Beispiel ist f(x,y) = x² + 2xy + y² homogen 2. Grades).

(a) Verifizieren Sie, dass z³ (ln x - ln y) homogen 3. Grades ist.

(b) Beweisen Sie, dass für eine allgemeine homogene Funktion n-ten

Grades gilt

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f$$

(Hinweis: Leiten Sie $f(u,v,w) = t^n f(x,y,z)$, $u=tx$, $v=ty$, $w=tz$ nach t ab, und setzen Sie anschließend $t=1$.)

Lösungsweg

(a)

Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= z^3 (\ln x - \ln y) \\ \rightarrow f(tx, ty, tz) &= (tz)^3 (\ln(tx) - \ln(ty)) \\ &= t^3 z^3 (\ln t + \ln x - \ln t - \ln y) \\ &= t^3 z^3 (\ln x - \ln y) \\ &= t^3 f(x, y, z) \end{aligned}$$

und haben damit den Beweis geführt.

(b)

Wir führen die Variablen

$$u = xt, \quad v = yt, \quad w = zt$$

ein und finden für eine in ihren Argumenten homogene Funktion f :

$$f(u, v, w) = f(xt, yt, zt) = t^n f(x, y, z)$$

Wenn wir diese Gleichung nach t ableiten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial (xt)} \frac{\partial (xt)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial (yt)} \frac{\partial (yt)}{\partial t} \\ + \frac{\partial f}{\partial (zt)} \frac{\partial (zt)}{\partial t} = n t^{n-1} f \end{aligned}$$

Dabei haben wir jeweils die Funktion nach dem Argument, dann das Argument nach t abgeleitet, wie durch die Kettenregel vorgeschrieben.

Da $\frac{\partial (xt)}{\partial t} = x$, usw. gilt, folgt

$$\begin{aligned} \left[x \frac{\partial}{\partial (xt)} + y \frac{\partial}{\partial (yt)} + z \frac{\partial}{\partial (zt)} \right] f(xt, yt, zt) \\ = n t^{n-1} f(xt, yt, zt). \end{aligned}$$

Für t ist jeder Wert (außer 0) zulässig und wir wählen $t=1$ und erhalten so die angegebene partielle Differenzialgleichung für homogene Funktionen,

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right] f(x, y, z) = n f(x, y, z).$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.22

Sei

$$V(r) = a r^n, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

zeigen Sie, dass $V(r)$ eine homogene Funktion n -ten Grades ist und die Differenzialgleichung der vorhergehenden Aufgabe 4.21 erfüllt.

Lösungsweg

Offenbar ist r homogen vom Grad 1, da ja

$$\begin{aligned} r(tx, ty, tz) &= \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 z^2} \\ &= t r(x, y, z) \end{aligned}$$

gilt. Da $V(r)$ homogen in r vom Grad n ist, ist es also auch homogen in x, y, z vom Grad n :

$$V(tx, ty, tz) = V(tr) = t^n V(r) = t^n V(x, y, z).$$

Wir überprüfen die Differenzialgleichung für homogene Funktionen,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f$$

Wir sehen

```
In[ ]:= V[x_, y_, z_] = a (x^2 + y^2 + z^2)^n/2;  
D[V[x, y, z], x]
```

```
Out[ ]:= a n x (x^2 + y^2 + z^2)^-1 + n/2
```

und daher

$$\begin{aligned} x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} &= \\ a n (x^2 + y^2 + z^2) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1 + \frac{n}{2}} &= \\ = a n (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}} &= n V \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichung ist also erfüllt.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.24

Zeigen Sie, dass der relative Fehler (dT/T) im idealen Gasgesetz $RT=pV$ die Summe der relativen Fehler der Faktoren ist.

Lösungsweg

Wir bilden das totale Differenzial (Variablen: p, V, T ; R ist eine Konstante) der Gasgleichung,

$$R \, dT = V \, dp + p \, dV,$$

und dividieren durch RT :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{V}{RT} dp + \frac{p}{RT} dV \\ \rightarrow \frac{dT}{T} &= \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Gasgleichung verwendeten. Das Ergebnis ist wie in der Aufgabe vorhergesagt, nämlich die Summe der relativen Fehler von Druck p und Volumen V . Natürlich ist dies ein Näherungsergebnis, das in führender Ordnung (eben in den Differenzialen) gilt. Bei großen Abweichungen wird das nicht mehr stimmen, zum Beispiel seien die richtigen Werte

$$p = 10, \quad V = 100 \rightarrow T(p, V) = \frac{pV}{R} = \frac{1000}{R}$$

und die Messungenauigkeit von p und V

$$V = 110 \rightarrow dV = +10, \quad p = 12 \rightarrow dp = 2$$

Die explizite Rechnung ergibt

$$T(12, 110) = \frac{1320}{R} \rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{320}{1000} = 0.32$$

während unser Näherungsausdruck

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{2}{10} + \frac{10}{100} = 0.3$$

ergibt.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.25

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktionen

(a) $\exp(\cos x)$ und (b) $\frac{|\sin x|}{x}$

in Hinblick auf Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Asymptoten und singuläre Stellen (so vorhanden), und erstellen Sie eine Skizze des Graphen im Bereich $[-5, 5]$.

Lösungsweg

(a)

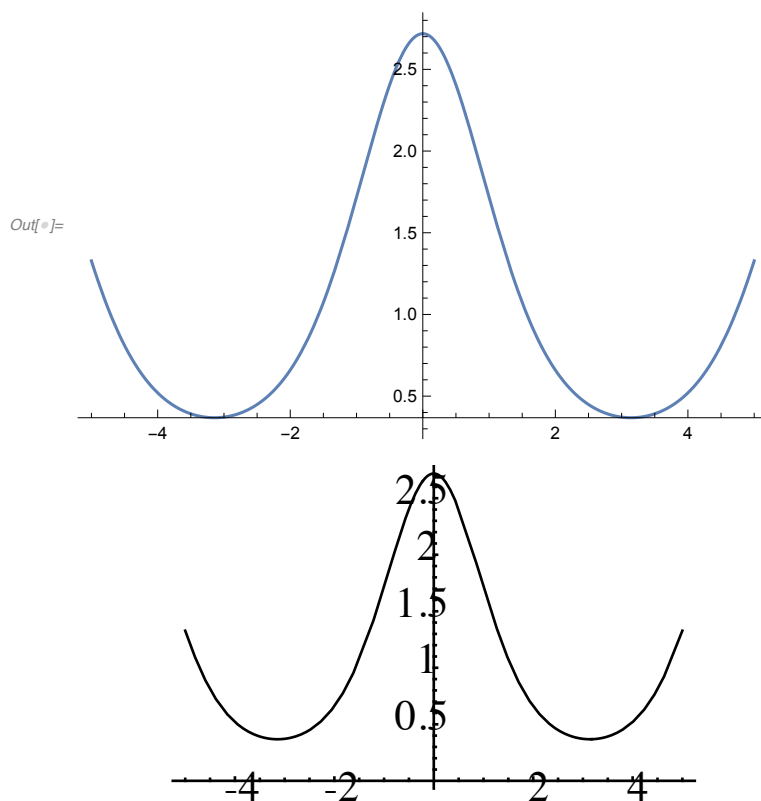
Wir betrachten die Funktion

```
In[ ]:= f[x_] = Exp[Cos[x]];
```

für reelle Argumente x .

Skizze:

In[]:= Plot[f[x], {x, -5, 5}]



-Graphics-

Die Funktion ist gerade (symmetrisch), da

$$f(-x) = \exp(\cos(-x)) = \exp(\cos(x)) = f(x)$$

Sie ist überall stetig und hat keine Nullstellen, da die Exponentialfunktion für alle endlichen Argumente ungleich null ist und der Kosinus überall endlich ist.

Extremwerte:

In[]:= f' = D[f[x], x] == 0

Out[]:= $-e^{\cos[x]} \sin[x] == 0$

Lösungen:

$\sin[x]=0 \rightarrow x=n\pi$, im betrachteten Intervall also bei $x=-\pi, 0, \pi$.

Die zweite Ableitung ist:

In[]:= f'' = D[f'[x], {x, 2}]

Out[]:= $-e^{\cos[x]} \cos[x] + e^{\cos[x]} \sin[x]^2$

In[]:= f'' /. {x -> -π}

Out[]:= $\frac{1}{e}$

In[]:= f'' /. {x -> 0}

Out[]:= $-e$

In[*]:= $f'' / . \{x \rightarrow \pi\}$

Out[*]= $\frac{1}{e}$

Die **Extrema** sind also:

$x = -\pi, \pi$: Minima

$x = 0$: Maximum

Wendepunkte erhalten wir durch Nullsetzen der 2. Ableitung:

$$-E^{\cos[x]} \cos[x] + E^{\cos[x]} \sin[x]^2 = 0$$

$$\rightarrow \cos[x] = \sin[x]^2$$

$$\rightarrow \cos[x]^2 + \cos[x] - 1 = 0$$

$$\rightarrow \cos[x] = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{5})$$

Nur die positive Wurzel liefert einen möglichen Wert (für reelle Werte des Kosinus), nämlich

$$x = \text{ArcCos}\left[\frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5})\right] = \pm 0.90455 \dots$$

In[*]:= $N[\text{ArcCos}[\frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5})]]$

Out[*]= 0.904557

(b)

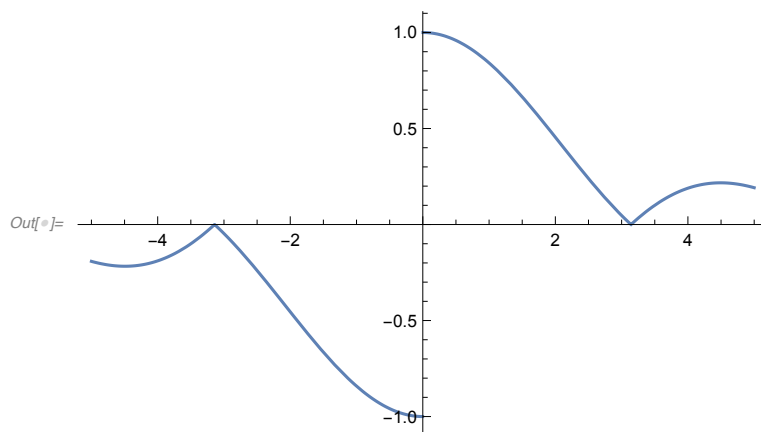
Wir betrachten die Funktion

$$\text{In[*]:= } f[x_] = \frac{\text{Abs}[\sin[x]]}{x};$$

für reelle Argumente x.

Skizze:

In[*]:= $\text{Plot}[f[x], \{x, -5, 5\}]$



Wir betrachten zuerst die Kandidaten für Unstetigkeitsstellen.

$$0 < x < \varepsilon : f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

```
In[*]:= Limit[Sin[x] / x, x -> 0, Direction -> -1]
```

```
Out[*]:= 1
```

$$-\varepsilon < x < 0 : f(x) = -\frac{\sin x}{x},$$

```
In[*]:= Limit[-Sin[x] / x, x -> 0, Direction -> 1]
```

```
Out[*]:= -1
```

Es gibt also eine Unstetigkeit dieser Funktion bei $x=0$. Das zeigt, dass wir dort die Funktion nicht ausreichend definiert haben, da nicht klar ist welchen Wert die Funktion dort annehmen soll! Die Funktion ist dort unbestimmt.

Da $|\sin x|$ und auch x überall stetig sind, war nur der mögliche Kandidat für eine Singularität, also der Punkt $x=0$, eine möglich Unstetigkeitsstelle, die sich auch als solche bestätigt hat.

Die Funktion hat also keine Singularität (Unendlichkeit), wohl aber eine Unstetigkeit bei $x=0$. Die Funktion ist ungerade (schiefsymmetrisch), da

$$f(-x) = \frac{|\sin(-x)|}{-x} = -\frac{|\sin(x)|}{x} = -f(x).$$

Neben der Unstetigkeit bei $x=0$ gibt es Punkte (bei $x=\pm n\pi$), an denen die Funktion nicht differenzierbar ist. Die Position etwaiger Extremwert muss also in den differenzierbaren Teilstücken getrennt untersucht werden. Daneben müssen diese Stellen selbst ebenfalls auf ihre Zahlenwerte untersucht werden.

Offenbar wird ist 1 das Supremum und -1 das Infimum, jeweils erreicht im Limes $x \rightarrow 0$ von oben oder unten. An diesem Punkt selbst ist die Funktion (wie oben besprochen) nicht definiert worden.

Wir untersuchen in den verschiedenen Intervallen die Ableitung der Funktion:

$$-5 < x < -\pi : f(x) = \sin(x) / x$$

```
In[*]:= D[Sin[x] / x, x] == 0
```

```
Out[*]:= Cos[x] / x - Sin[x] / x^2 == 0
```

Lösung: $\tan[x]=x$.

Wir lösen numerisch:

```
In[*]:= FindRoot[Tan[x] == x, {x, -4}]
```

```
Out[*]:= {x -> -4.49341}
```

Die 2. Ableitung lautet an dieser Stelle

```
In[*]:= D[Sin[x] / x, {x, 2}] /. {x -> -4.49340945790918677`}
```

```
Out[*]:= 0.217234
```

```
In[*]:= Sin[x] / x /. {x -> -4.49340945790918677`}
```

```
Out[*]:= -0.217234
```

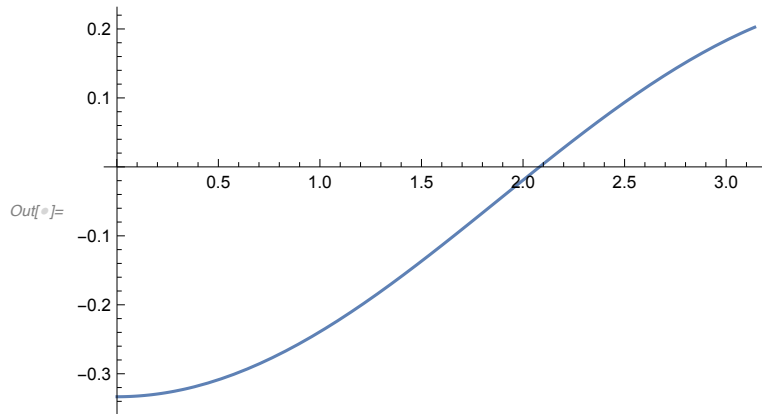
Es handelt sich (siehe Skizze) also um ein lokales Minimum mit dem Funktionswert -0.217234.

Entsprechend der Antisymmetrie findet man ein lokales Maximum bei $x=4.4934..$ mit dem Funktionswert 0.217234...

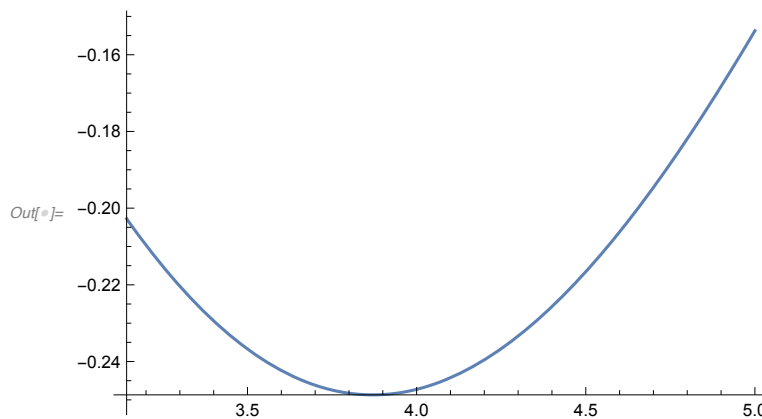
Daneben gibt es Nullstellen und lokale Maxima ($x < 0$) oder Minima ($x > 0$).

Wendepunkte erhalten wir durch Nullsetzen der 2. Ableitung. Dazu verschaffen wir uns eine Skizze des Funktionsverlaufes der 2. Ableitung. Dazu müssen wir den Definitionsbereich zerlegen.

```
In[ ]:= Plot[Evaluate[D[Sin[x] / x, {x, 2}]], {x, 0.001, Pi - 0.001}]
```



```
In[ ]:= Plot[Evaluate[D[-Sin[x] / x, {x, 2}]], {x, Pi + 0.001, 5}]
```



Wir finden einen Wendepunkt bei x nahe 2.1. Genauer:

```
In[ ]:= D2 = D[Sin[x] / x, {x, 2}] == 0
```

```
Out[ ]:= - 2 Cos[x] / x^2 + 2 Sin[x] / x^3 - Sin[x] / x == 0
```

```
In[ ]:= FindRoot[D2, {x, 2}]
```

```
Out[ ]:= {x -> 2.08158}
```

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften finden wir also Wendepunkte bei $x = \pm 2.08157...$

Für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwindet die Funktion.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.26

Wandeln Sie die Differenzialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 x \frac{d y}{d x} - 5 y = 0$$

mit Hilfe der Substitution $x=e^z$ in eine andere mit konstanten Koeffizienten in $\frac{d^2 y}{dz^2}$, $\frac{dy}{dz}$ und z um.

Lösungsweg

Laut Angabe ist

$$y(x) = y(x(z)) = y(e^z)$$

Wir verwendet die Kettenregel der Differenziation

$$\begin{aligned}\frac{dy(x(z))}{dz} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} = e^z \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy(z)}{dz}, \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

und daher wird die ursprüngliche Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - 5y = 0.$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.27

Berechnen Sie für die Fläche $z(x,y)$, die der impliziten Gleichung

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 37$$

genügt, die Tangentialebene im Punkt $(0,1,2)$.

Lösungsweg

Wir bilden das totale Differenzial der Funktion

```
In[ ]:= f = 4 x^2 + y^2 + 9 z^2;
```

```
Dt[f]
```

```
Out[ ]:= 8 x Dt[x] + 2 y Dt[y] + 18 z Dt[z]
```

an der Stelle $(x,y,z)=(0,1,2)$:

$$2 Dt[y] + 36 Dt[z]$$

Daraus folgt die Gleichung der Tangentialebene

$$2 (y - 1) + 36 (z - 2) = 0$$

$$\rightarrow y + 18 z = 37$$

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.28

Finden Sie den kürzesten Abstand des Koordinatenursprungs zur Kurve

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2.$$

Lösungsweg

Der Punkt (x, y) an dem der Abstand minimal wird, ist auch der Punkt an dem das Quadrat des Abstands minimal wird. Wir wollen also die Funktion

```
In[ ]:= f[x_, y_] = x^2 + y^2
```

```
Out[ ]:= x^2 + y^2
```

mit der Nebenbedingung

```
In[ ]:= g[x_, y_] = x^2 - 2\sqrt{3} x y - y^2 - 2
```

```
Out[ ]:= -2 + x^2 - 2\sqrt{3} x y - y^2
```

minimieren.

Nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren definieren wir eine Funktion von drei Variablen (x, y, a) :

```
In[ ]:= F[x_, y_, a_] = f[x, y] + a g[x, y]
```

```
Out[ ]:= x^2 + y^2 + a (-2 + x^2 - 2\sqrt{3} x y - y^2)
```

und setzen alle drei Ableitungen nach diesen Variablen null:

```
In[ ]:= Ax = D[F[x, y, a], x]
```

```
Out[ ]:= 2 x + a (2 x - 2\sqrt{3} y)
```

```
In[ ]:= Ay = D[F[x, y, a], y]
```

```
Out[ ]:= a (-2\sqrt{3} x - 2 y) + 2 y
```

```
In[ ]:= Aa = D[F[x, y, a], a]
```

```
Out[ ]:= -2 + x^2 - 2\sqrt{3} x y - y^2
```

```
In[ ]:= Solve[{Ax == 0, Ay == 0, Aa == 0}]
```

```
Out[ ]:= {{a -> \frac{1}{2}, x -> -\frac{i}{2}, y -> -\frac{i\sqrt{3}}{2}}, {a -> \frac{1}{2}, x -> \frac{i}{2}, y -> \frac{i\sqrt{3}}{2}},
```

$$\{a \rightarrow -\frac{1}{2}, x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}, y \rightarrow \frac{1}{2}\}, \{a \rightarrow -\frac{1}{2}, x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}, y \rightarrow -\frac{1}{2}\}}$$

Nur die beiden ersten Ergebnisse sind reell und daher sinnvolle Lösungskandidaten. Die entsprechenden Werte der Abstandsquadratfunktion sind

$$\text{In}[*]:= \mathbf{f}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Out[*]= 1

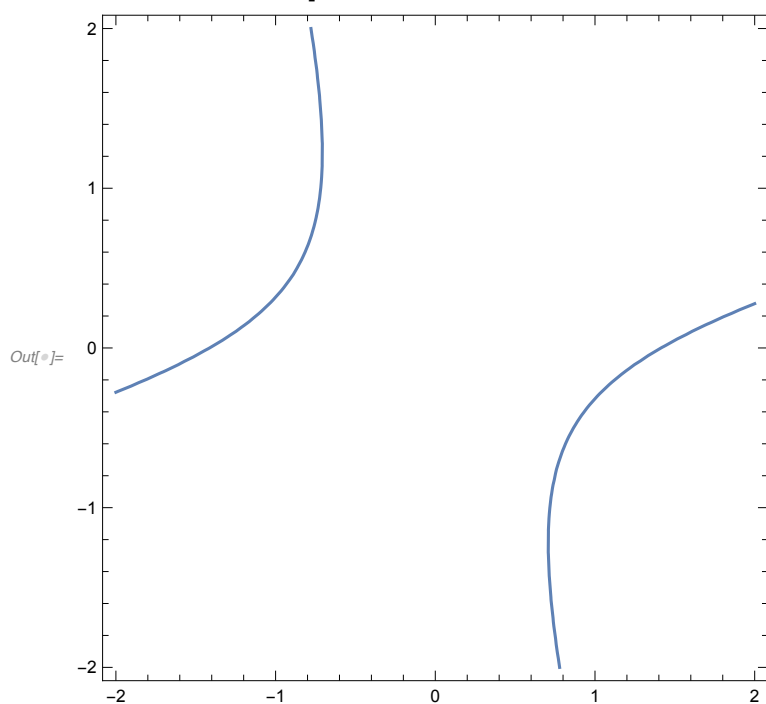
$$\text{In}[*]:= \mathbf{f}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

Out[*]= 1

und es gibt also zwei Lösungen mit gleichem Wert des Abstands $d=1$.

Das es sich dabei um Minima handelt, erkennen wir an einer Skizze des Verlaufs der Kurve:

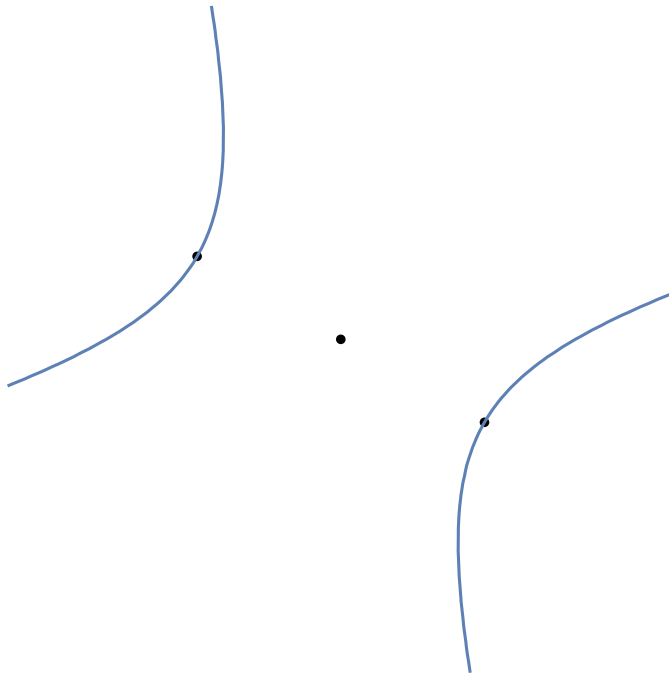
FP = ContourPlot $\left[x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 == 2, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}\right]$



Die dem Ursprung nächsten Werte sind, wie oben berechne die beiden Punkte $(-0.8660\ldots, 0.5)$ und $(0.8660\ldots, -0.5)$.

```
In[ ]:= Show[Graphics[{AbsolutePointSize[5], Point[{0, 0}],
  Point[{-√3 / 2, 1 / 2}], Point[{√3 / 2, -1 / 2}]}], FP]
```

```
Out[ ]:=
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.31

(a) Welches ist der kleinste Abstand zwischen dem Ursprung und der Schnittkurve der beiden Flächen $xy=12$ und $x+2z=0$?

(b) Was ist der kürzeste Abstand zwischen den zwei Parabeln $y = 1 - x^2$ und $y = -1 + x^2$? Fertigen Sie eine Skizze an!

Lösungsweg

(a)

Das Abstandsquadrat eines Punktes (x, y, z) zum Ursprung ist

$$d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Gleichzeitig soll gelten

$$xy = 12,$$

$$x + 2z = 0.$$

Wir bilden (nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren) die Funktion

```
In[ ]:= F = x^2 + y^2 + z^2 + r (x y - 12) + s (x + 2 z);
```

und berechnen die Ableitungen nach allen Variablen (x, y, z, r, s) :

```
In[*]:= Ax = D[F, x] == 0
        Ay = D[F, y] == 0
        Az = D[F, z] == 0
        Ar = D[F, r] == 0
        As = D[F, s] == 0
```

```
Out[*]:= s + 2 x + r y == 0
```

```
Out[*]:= r x + 2 y == 0
```

```
Out[*]:= 2 s + 2 z == 0
```

```
Out[*]:= -12 + x y == 0
```

```
Out[*]:= x + 2 z == 0
```

Wir lösen das Gleichungssystem, indem wir mittels Ax, Ay, Az und As die Variablen r,s und z eliminieren.

```
In[*]:= Eliminate[{Ax, Ay, Az, As}, {s, r, z}]
```

```
Out[*]:= 4 y^2 == 5 x^2
```

Es bleiben diese Gleichung und die Gleichung für Ar==0:

$$4 y^2 == 5 x^2$$

$$x y == 12$$

```
In[*]:= Solve[{4 y^2 == 5 x^2, x y == 12}]
```

```
Out[*]:= {{x -> -\frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> -5^{1/4} \sqrt{6}}, {x -> -\frac{2 i \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> i 5^{1/4} \sqrt{6}},
          {x -> \frac{2 i \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> -i 5^{1/4} \sqrt{6}}, {x -> \frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> 5^{1/4} \sqrt{6}}}
```

Nur die erste und vierte Lösung sind reell; der entsprechende Werte von z ist jeweils (aus As berechnet):

$$x \rightarrow -\frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y \rightarrow -5^{1/4} \sqrt{6}, z \rightarrow \frac{\sqrt{6}}{5^{1/4}}$$

$$x \rightarrow \frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y \rightarrow 5^{1/4} \sqrt{6}, z \rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{5^{1/4}}$$

Der Fall $x=0, y=\infty$ oder $x=\infty, y=0$ ist ausgeschlossen, da diese Punkte zu maximalem Abstand führen.

Der Abstand zum Ursprung ist in beiden Fällen gleich, nämlich

```
In[*]:= d = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] /. {x -> -\frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> -5^{1/4} \sqrt{6}, z -> \frac{\sqrt{6}}{5^{1/4}}}
```

```
Out[*]:= 2 \sqrt{3} 5^{1/4}
```

```
In[*]:= d = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] /. {x -> \frac{2 \sqrt{6}}{5^{1/4}}, y -> 5^{1/4} \sqrt{6}, z -> -\frac{\sqrt{6}}{5^{1/4}}}
```

```
Out[*]:= 2 \sqrt{3} 5^{1/4}
```

Beide Lösungen sind also gleichwertig. Der kürzeste Abstand der Schnittkurve ist damit $\sqrt{12\sqrt{5}}$.

In dieser Aufgabe hätte man auch mit Hilfe der Angaben zwei Variablen eliminieren können, also

```
In[*]:= x^2 + y^2 + z^2 /. {x -> -2 z, y -> -6/z}
```

```
Out[*]:= 36/z^2 + 5 z^2
```

```
In[*]:= F = 36/z^2 + 5 z^2;
```

```
In[*]:= D[F, z] == 0
```

```
Out[*]:= -72/z^3 + 10 z == 0
```

```
In[*]:= Solve[-72/z^3 + 10 z == 0]
```

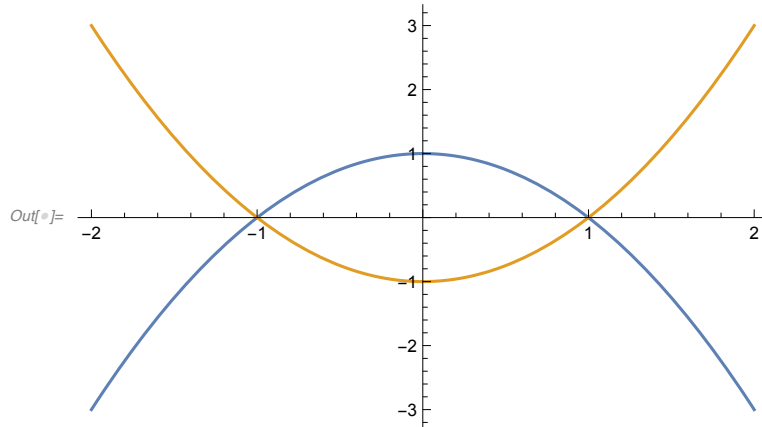
```
Out[*]:= {{z -> -sqrt(6)/5^(1/4)}, {z -> -i sqrt(6)/5^(1/4)}, {z -> i sqrt(6)/5^(1/4)}, {z -> sqrt(6)/5^(1/4)}}
```

Wieder liefern die erste und vierte Lösung je eine gleichwertige Lösung der Aufgabe, gleich wie oben. Dieser Zugang ist hier wohl der kürzere!

(b)

Wir skizzieren die Situation

```
In[*]:= Plot[{1 - x^2, -1 + x^2}, {x, -2, 2}]
```



und finden, dass sich die Kurven schneiden. Der kleinste Abstand ist offenbar an den Schnittpunkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ gegeben.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.32

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Fläche

$$z(x, y) = (x - a)(y - b) \exp(-(x - a)^2 - (y - b)^2)$$

im Gebiet $(x, y) \in [a-2, a+2] \times [b-2, b+2]$, $a, b \in \mathbb{R}$, und berechnen Sie explizit an diesen Punkten $D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$.

Lösungsweg

Wir untersuchen die Funktion

$$\text{In[*]:= } z[x_, y_] = (x - a) (y - b) \text{Exp}[-(x - a)^2 - (y - b)^2];$$

Wir berechnen die 1. Ableitungen:

$$\text{In[*]:= } Ax = D[z[x, y], x]$$

$$\text{Out[*]:= } e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-b + y) - 2 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x)^2 (-b + y)$$

$$\text{In[*]:= } Ay = D[z[x, y], y]$$

$$\text{Out[*]:= } e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x) - 2 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x) (-b + y)^2$$

Da die Exponentialfunktion ungleich null ist, können wir diese Gleichungen vereinfachen und erhalten

$$(-b + y) - 2 (-a + x)^2 (-b + y) = 0$$

$$(-a + x) - 2 (-a + x) (-b + y)^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$y = b, \quad x = a$$

$$x = a \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = b \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die zweiten Ableitungen ergeben

$$\text{In[*]:= } Axx = D[Ax, x]$$

$$Ayy = D[Ay, y]$$

$$Axy = D[Ax, y]$$

$$\text{Out[*]:= } -6 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x) (-b + y) + 4 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x)^3 (-b + y)$$

$$\text{Out[*]:= } -6 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x) (-b + y) + 4 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x) (-b + y)^3$$

$$\text{Out[*]:= } e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} - 2 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x)^2 - 2 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-b + y)^2 + 4 e^{-(a-x)^2 - (b-y)^2} (-a + x)^2 (-b + y)^2$$

Für $x=a, y=b$ verschwinden diese 2. Ableitungen, man muss diesen Fall also weiter untersuchen. Für den anderen Lösungstyp ergibt sich $D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 > 0$, es handelt sich also um Extrema:

$$\text{In[*]:= } Axx Ayy - Axy^2 /. \{x \rightarrow a + \sqrt{\frac{1}{2}}, y \rightarrow b + \sqrt{\frac{1}{2}}\}$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{4}{e^2}$$

$$\text{In[*]:= } Axx Ayy - Axy^2 /. \{x \rightarrow a + \sqrt{\frac{1}{2}}, y \rightarrow b - \sqrt{\frac{1}{2}}\}$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{4}{e^2}$$

$$\text{In[*]:= Axx Ayy - Axy^2 /. \{x -> a - \sqrt{\frac{1}{2}}, y -> b + \sqrt{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{4}{e^2}$$

$$\text{In[*]:= Axx Ayy - Axy^2 /. \{x -> a - \sqrt{\frac{1}{2}}, y -> b - \sqrt{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{4}{e^2}$$

Die erste Lösung hat $z_{xx} < 0$, $z_{yy} < 0$:

$$\text{In[*]:= Axx /. \{x -> a + \sqrt{\frac{1}{2}}, y -> b + \sqrt{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{2}{e}$$

$$\text{In[*]:= Ayy /. \{x -> a + \sqrt{\frac{1}{2}}, y -> b + \sqrt{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\text{Out[*]:= } -\frac{2}{e}$$

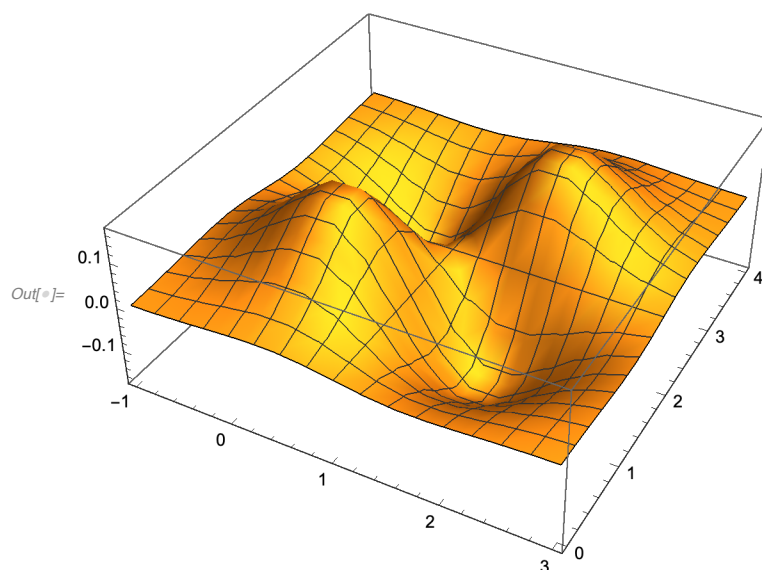
und es ist daher ein Maximum. Insgesamt zeigt sich:

$$\text{Maxima: } (x, y) = \left(a + \sqrt{\frac{1}{2}}, b + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ und } \left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}, b - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\text{Minima: } (x, y) = \left(a + \sqrt{\frac{1}{2}}, b - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ und } \left(a - \sqrt{\frac{1}{2}}, b + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Wir wollen die Fläche (Spezialfall $a=1, b=2$) zeichnen:

$$\text{In[*]:= Plot3D[z[x, y] /. \{a -> 1, b -> 2\}, \{x, -1, 3\}, \{y, 0, 4\}]}$$



Wir erkennen klar die von uns bestimmten Extremwerte. Ebenso klar wird, daß (a,b) ein Sattelpunkt ist.

```
In[*]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.33

Die Funktion

$$(1/x) + (4/y) + (9/z)$$

soll ein Minimum werden, wenn $x, y, z > 0$ und $x+y+z=12$.

Lösungsweg

Wir gehen nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren vor und bilden die Funktion

```
In[*]:= F[x_, y_, z_, lambda_] = 1/x + 4/y + 9/z + lambda (x + y + z - 12);
```

die Ableitungen ergeben

```
In[*]:= A1 = D[F[x, y, z, lambda], x]
A2 = D[F[x, y, z, lambda], y]
A3 = D[F[x, y, z, lambda], z]
A4 = D[F[x, y, z, lambda], lambda]
```

$$\text{Out[*]} = \lambda - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Out[*]} = \lambda - \frac{4}{y^2}$$

$$\text{Out[*]} = \lambda - \frac{9}{z^2}$$

$$\text{Out[*]} = -12 + x + y + z$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem unter der Annahme nichtverschwindender x, y, z und erhalten

```
In[*]:= Solve[{A1 == 0, A2 == 0, A3 == 0, A4 == 0}]
```

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{36}, x \rightarrow 6, y \rightarrow -12, z \rightarrow 18 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{9}, x \rightarrow -3, y \rightarrow 6, z \rightarrow 9 \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{4}, x \rightarrow 2, y \rightarrow 4, z \rightarrow 6 \right\} \right\}$$

Nur die zweite Lösung erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Handelt es sich dabei um ein Minimum? Wir bilden

```
In[*]:= Ab1 = {{D[A1, x], D[A2, x], D[A3, x]},
               {D[A1, y], D[A2, y], D[A3, y]},
               {D[A1, z], D[A2, z], D[A3, z]}}
```

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ \frac{2}{x^3}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{8}{y^3}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{18}{z^3} \right\} \right\}$$

```
In[ ]:= Abl /. {x -> 2, y -> 4, z -> 6}
Out[ ]:= {{1/4, 0, 0}, {0, 1/8, 0}, {0, 0, 1/12}}
```

Es handelt sich also bei der Matrix der 2. Ableitungen (entsprechend M.4.4) um eine streng positive quadratische Form und also um ein Minimum mit dem Zahlenwert

```
In[ ]:= 1 / x + 4 / y + 9 / z /. {x -> 2, y -> 4, z -> 6}
Out[ ]:= 3
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.34

Berechnen Sie die kürzeste und längste Strecke vom Ursprung zur Kurve

$$x^2 + xy + y^2 = 16$$

Lösungsweg

Statt des Abstands können wir auch das Quadrat des Abstands minimieren. Das Abstandsquadrat eines Punktes (x,y) zum Ursprung ist

$$x^2 + y^2.$$

Wir gehen nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren vor und schreiben die Ausgangsfunktion daher

```
In[ ]:= F[x_, y_, la_] := x^2 + y^2 + lambda * (x^2 + x y + y^2 - 16)
```

Wir lösen das Gleichungssystem, das sich aus den drei ersten partiellen Ableitungen nach x, y, und lambda ergibt.

```
In[ ]:= MySolution = Solve[{
    D[F[x, y, lambda], x] == 0,
    D[F[x, y, lambda], y] == 0,
    D[F[x, y, lambda], lambda] == 0},
    {x, y, lambda}]
Out[ ]:= {{x -> -4, y -> 4, lambda -> -2}, {x -> 4, y -> -4, lambda -> -2},
    {x -> -4/sqrt(3), y -> -4/sqrt(3), lambda -> -2/3}, {x -> 4/sqrt(3), y -> 4/sqrt(3), lambda -> -2/3}}
```

Die Funktionswerte an den Lösungspunkten sind

```
In[ ]:= x^2 + y^2 /. MySolution
Out[ ]:= {32, 32, 32/3, 32/3}
```

Der Abstand wird also an den beiden zweitgenannten Punkten minimal.

```
In[ ]:= Abstand = Sqrt[x^2 + y^2 /. MySolution]
Out[ ]:= {4 sqrt(2), 4 sqrt(2), 4 sqrt(2/3), 4 sqrt(2/3)}
```

Wir verschaffen uns ein Bild der Fragestellung und der Lösung:

```
In[ ]:= << Graphics`ImplicitPlot`
```

```
Get: Cannot open Graphics`ImplicitPlot`.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= ImplicitPlot[x^2 + x y + y^2 == 6, {x, -4, 4}]
```

```
Out[ ]:= ImplicitPlot[x^2 + x y + y^2 == 6, {x, -4, 4}]
```

Aus der Lage der Ellipse ist klar, dass die Extremwerte jeweils diagonal liegende Punkte sind.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.35

Die Temperatur einer rechteckigen Platte mit den Rändern $x = \pm 1$, $y = \pm 2$ ist gegeben durch

$$T = x^2 - 4y^2 + y - 5.$$

Finden Sie die heißesten und kältesten Punkte.

Lösungsweg

Es ist also

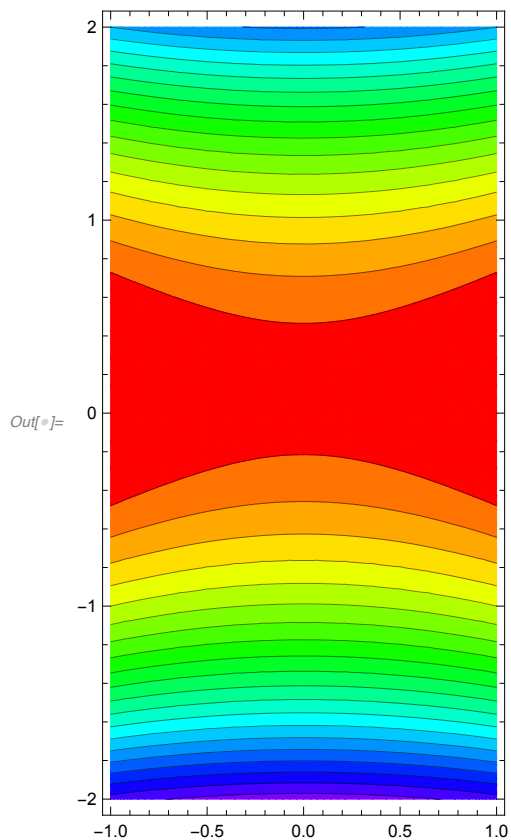
```
In[ ]:= T[x_, y_] = x^2 - 4 y^2 + y - 5;
```

Wir wollen uns zuerst eine Vorstellung über die Wärmeverteilung machen:

```

In[ ]:= MyCol[c_] = Hue[(1 - c) * 0.75];
ContourPlot[T[x, y], {x, -1, 1}, {y, -2, 2},
  Contours -> 20, ColorFunction -> MyCol,
  AspectRatio -> 2]

```



Mittels Differenziation bekommen wir die lokalen Extrema:

```

In[ ]:= D[T[x, y], x] == 0
         D[T[x, y], y] == 0

```

Out[]:= $2x == 0$

Out[]:= $1 - 8y == 0$

Die beiden Gleichungen verschwinden simultan bei $(x, y) = (0, 1/8)$, die zweiten Ableitungen sind dort:

$$T_{xx} = 2, \quad T_{xy} = 0, \quad T_{yy} = -8,$$

und daher handelt es sich um einen Sattelpunkt, wie wir es auch anhand der Skizze leicht sehen.

Wir untersuchen nun die Ränder:

$$(x = -1): T[-1, y] = -4 + y - 4y^2$$

```

In[ ]:= D[T[-1, y], y]

```

Out[]:= $1 - 8y$

```

In[ ]:= D[T[-1, y], {y, 2}]

```

Out[]:= -8

Wir finden ein Maximum bei $(x, y) = (-1, 1/8)$ mit der Temperatur

$$\text{In[*]} := T[-1, 1/8]$$

$$\text{Out[*]} = -\frac{63}{16}$$

$$\text{In[*]} := T[1, y]$$

$$\text{Out[*]} = -4 + y - 4y^2$$

$$(x = 1): T[1, y] = -4 + y - 4y^2 = T[-1, y]$$

Wir finden ein weiteres Maximum bei $(x,y)=(1,1/8)$ mit der Temperatur

$$\text{In[*]} := T[1, 1/8]$$

$$\text{Out[*]} = -\frac{63}{16}$$

$$\text{In[*]} := T[x, 2]$$

$$\text{Out[*]} = -19 + x^2$$

$$(y = -2): T[x, -2] = -23 + x^2$$

$$\text{In[*]} := D[T[x, -2], x]$$

$$\text{Out[*]} = 2x$$

$$\text{In[*]} := D[T[x, -2], \{x, 2\}]$$

$$\text{Out[*]} = 2$$

Wir finden ein Minimum bei $(x,y)=(0,-2)$ mit der Temperatur

$$\text{In[*]} := T[0, -2]$$

$$\text{Out[*]} = -23$$

$$(y = 2): T[x, 2] = -19 + x^2$$

$$\text{In[*]} := D[T[x, 2], x]$$

$$\text{Out[*]} = 2x$$

$$\text{In[*]} := D[T[x, 2], \{x, 2\}]$$

$$\text{Out[*]} = 2$$

Wir finden ein weiteres Minimum bei $(x,y)=(0,2)$ mit der Temperatur

$$T[0,2]$$

$$-19$$

Schließlich überprüfen wir noch die 4 Eckpunkte:

$$T[-1,-2]$$

$$-22$$

$T[1,-2]$

- 22

$T[-1,2]$

- 18

$T[1,2]$

- 18

Der globale Maximalwert -63/16 wird also bei beiden Punkten $(x,y)=(\pm 1,1/8)$ angenommen, während der kälteste Punkt mit einer Temperatur von -23 bei $(0,-2)$ liegt.

`In[ ]:= ClearAll["Global`*"];`

4.36

Ein Reiter soll möglichst schnell von A nach B (den diagonal entgegengesetzt liegenden Ecken eines Rechtecks) gelangen und muss dabei durch Sumpf (untere Hälfte) und über eine Steppe (obere Hälfte). Seine Geschwindigkeit im Sumpf beträgt $v=a$, in der Steppe $v=b$ ($b>a$). Zeigen Sie, dass die optimale Lösung dem Gesetz der Lichtbrechung folgt:

$$\frac{|\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)|}{|\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)|} = \frac{a}{b}.$$

Berechnen Sie mit numerischen Methoden die Position des Grenzpunktes X für $A=(0,0)$, $B=(1000,1000)$, $b=2a=5$ m/s.

Lösungsweg

Wir nennen (vgl. Skizze im Buch) den Übergangspunkt zwischen Sumpf und Steppe X. Der Winkel des Weges AX zur waagrechten Trennlinie zwischen Sumpf und Steppe sei α , der zwischen der Strecke XB und der Trennlinie sei β .

Die Strecke besteht dann aus den beiden Teilen $\overline{AX}$ und $\overline{XB}$ und die Gesamtdauer der Überquerung ist

$$T = |\overline{AX}|/a + |\overline{XB}|/b$$

Wir wählen die Koordinaten für $A=(0,0)$ und für $B=(c,d)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir unsere Einheiten so wählen, dass die Breite der beiden Streifen (Sumpf und Steppe) je 1 ist, die Länge sei d . Wie man leicht aus einer Skizze sehen kann, sind die Koordinaten für X daher

$$X = (1, \cot \alpha)$$

Gleichzeitig gilt

$$\cot \beta = d - \cot \alpha.$$

Die Gesamtzeit ist also

$$T = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (\cot \alpha)^2} + \frac{1}{b} \sqrt{1 + (d - \cot \alpha)^2}$$

Wir minimieren also die Funktion

$$\text{In[*]:= } f[\alpha] = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \cot[\alpha]^2} + \frac{1}{b} \sqrt{1 + (d - \cot[\alpha])^2};$$

Wir fordern, dass die Ableitung verschwindet:

$$\text{In[*]:= } D[f[\alpha], \alpha] == 0$$

$$\text{Out[*]:= } \frac{(d - \cot[\alpha]) \csc[\alpha]^2}{b \sqrt{1 + (d - \cot[\alpha])^2}} - \frac{\cot[\alpha] \csc[\alpha]^2}{a \sqrt{1 + \cot[\alpha]^2}} == 0$$

Beachten Sie: $\csc[x] = 1/\sin[x]$; Da $\csc(x)$ sicher nicht verschwinden kann, lösen wir diese Gleichung auf:

$$\frac{(d - \cot[\alpha])}{b \sqrt{1 + (d - \cot[\alpha])^2}} = \frac{\cot[\alpha]}{a \sqrt{1 + \cot[\alpha]^2}}$$

Keine der beiden Wurzelausdrücke kann verschwinden, da es sich ja um die Zeiten handelt, die man zur Querung benötigt. Wir können also mit den Wurzelausdrücken erweitern und dann quadrieren.

$$a \sqrt{1 + \frac{1}{\cot[\alpha]^2}} = b \sqrt{1 + \frac{1}{(d - \cot[\alpha])^2}}$$

Wenn wir hier wieder mittels

$$d - \cot[\alpha] = \cot[\beta]$$

den Winkel β ins Spiel bringen, ergibt sich

$$a \sqrt{1 + \frac{1}{\cot[\alpha]^2}} = b \sqrt{1 + \frac{1}{(d - \cot[\alpha])^2}}$$

$$a \sqrt{\frac{\cos[\alpha]^2 + \sin[\alpha]^2}{\cos[\alpha]^2}} = b \sqrt{\frac{\cos[\beta]^2 + \sin[\beta]^2}{\cos[\beta]^2}}$$

$$\frac{a}{\cos[\alpha]} = \frac{b}{\cos[\beta]}$$

$$\frac{a}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]} = \frac{b}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \beta\right]}$$

Dabei haben wir die Positivität von $\cos[\alpha]$ und $\cos[\beta]$ vorausgesetzt. Diese ist sicher erfüllt, da die Winkel nur Werte zwischen 0 und $\pi/2$ annehmen. Es ergibt sich schließlich das bekannte Gesetz:

$$\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \beta\right]} = \frac{a}{b}.$$

Numerische Beispiel:

Es ist laut Angabe $a/b=0.5$ und wir suchen daher die Lösung der Gleichung

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right] = 0.5 \sin\left[\frac{\pi}{2} - \beta\right]$$

$$\rightarrow \quad \cos[\beta] = 2 \cos[\alpha]$$

Gleichzeitig soll aber

$$\frac{c}{2} \cot \alpha + \frac{c}{2} \cot \beta = d$$

gelten (die Summe der Abschnitte von X zum linken und zu rechten Rand=d), oder, mit den Angaben c=d=1000:

$$\cot \alpha + \cot \beta = 2$$

Wir bilden zur Lösung

$$\frac{\cos[\alpha]}{\sqrt{1 - \cos[\alpha]^2}} + \frac{\cos[\beta]}{\sqrt{1 - \cos[\beta]^2}} = 2$$

und setzen $\cos[\beta] = 2 \cos[\alpha]$ ein.

$$\frac{\cos[\alpha]}{\sqrt{1 - \cos[\alpha]^2}} + \frac{2 \cos[\alpha]}{\sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2}} = 2$$

Schon hier könnte man eine numerische Lösung suchen:

$$\text{In[*]:= NSolve}\left[\frac{\cos[\alpha]}{\sqrt{1 - \cos[\alpha]^2}} + \frac{2 \cos[\alpha]}{\sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2}} == 2\right]$$

$$\text{Out[*]:= } \left\{ \left\{ \alpha \rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[1. (-1.13823 + 6.28319 c_1), c_1 \in \mathbb{Z}\right] \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \alpha \rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[1. (1.13823 + 6.28319 c_1), c_1 \in \mathbb{Z}\right] \right\} \right\}$$

Wir wollen die Gleichung aber noch umformen, um auf einen numerisch noch einfache zu behandelnden Ausdruck (ein Polynom) zu kommen.

Da $0 < \alpha < \pi/2$ ($d > 0$!) gilt, folgt

$$\cos[\alpha] \sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2} + 2 \cos[\alpha] \sqrt{1 - \cos[\alpha]^2} = 2 \sqrt{1 - \cos[\alpha]^2} \sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2}$$

Quadrieren ergibt

$$5 \cos[\alpha]^2 - 8 \cos[\alpha]^4 + 4 \cos[\alpha]^2 \sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2} \sqrt{1 - \cos[\alpha]^2} = \\ 4 - 20 \cos[\alpha]^2 + 16 \cos[\alpha]^4$$

und weiter

$$-4 + 25 \cos[\alpha]^2 - 24 \cos[\alpha]^4 = -4 \cos[\alpha]^2 \sqrt{1 - 4 \cos[\alpha]^2} \sqrt{1 - \cos[\alpha]^2}$$

Noch einmal müssen wir quadrieren und erhalten schließlich ein Polynom in $\cos[\alpha]^2$:

$$16 - 200 \cos[\alpha]^2 + 801 \cos[\alpha]^4 - 1120 \cos[\alpha]^6 + 512 \cos[\alpha]^8$$

$$\text{In[*]:= NSolve}[16 - 200 w^2 + 801 w^4 - 1120 w^6 + 512 w^8 == 0]$$

$$\text{Out[*]:= } \left\{ \{w \rightarrow -0.949987 - 0.0681508 i\}, \{w \rightarrow -0.949987 + 0.0681508 i\}, \right. \\ \left. \{w \rightarrow -0.464872\}, \{w \rightarrow -0.419206\}, \{w \rightarrow 0.419206\}, \{w \rightarrow 0.464872\}, \right. \\ \left. \{w \rightarrow 0.949987 - 0.0681508 i\}, \{w \rightarrow 0.949987 + 0.0681508 i\} \right\}$$

Die einzige Lösung im zulässigen reellen Intervall ist

$$w \rightarrow 0.419205838150095733`$$

$$\text{In[*]:= } \alpha = \text{ArcCos}[0.419205838150095733`]$$

$$\text{Out[*]:= } 1.13823$$

Die x-Koordinate von X lautete daher

```
In[ ]:= Abschnitt = Cot[α] * 1000 / 2
```

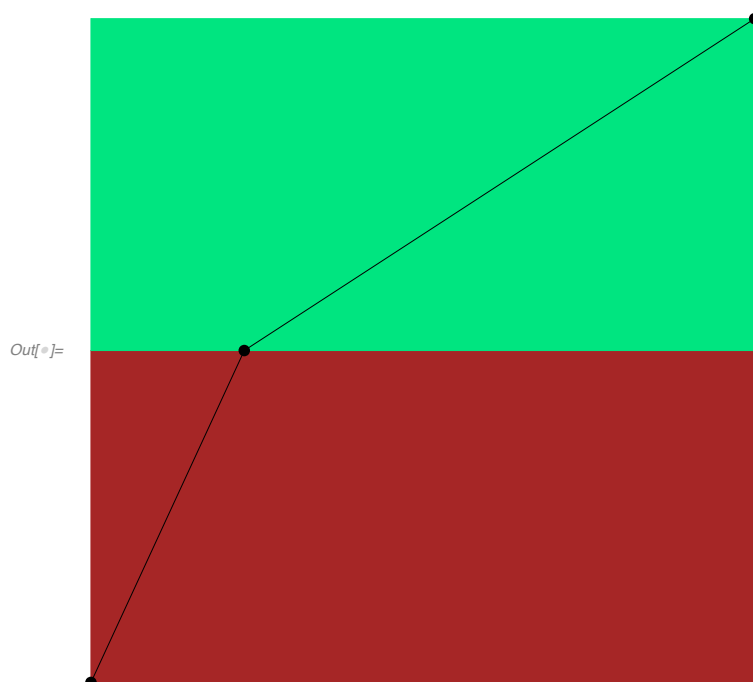
```
Out[ ]:= 230.868
```

Der Punkt X hat damit die Koordinaten (231,500).

```
In[ ]:= N[124 / 255]
```

```
Out[ ]:= 0.486275
```

```
In[ ]:= Show[Graphics[{ {RGBColor[0.65, 0.15, 0.15], Rectangle[{0, 0}, {1000, 500}],
  RGBColor[0., 0.9, 0.5], Rectangle[{0, 500}, {1000, 1000}]},
  AbsolutePointSize[6], Point[{0, 0}], Line[{0, 0}, {231, 500}],
  Line[{231, 500}, {1000, 1000}], Point[{231, 500}], Point[{1000, 1000}]}]]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.37

Sei die Ladungsverteilung auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ gegeben durch $q = x y z$. Finden Sie jene Punkte auf der Kugeloberfläche, für die q am größten ist.

Lösungsweg

Wir wollen q maximieren, wobei die Oberflächengleichung die Nebenbedingung darstellt. Wir gehen nach der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren vor und definieren die Funktion

```
In[ ]:= F[x_, y_, z_, a_] = x y z + a (x^2 + y^2 + z^2 - 12);
```

Wir berechnen alle 4 ersten Ableitungen und setzen sie null:

In[*]:= $Ax = D[F[x, y, z, a], x] == 0$

Out[*]= $2 a x + y z == 0$

In[*]:= $Ay = D[F[x, y, z, a], y] == 0$

Out[*]= $2 a y + x z == 0$

In[*]:= $Az = D[F[x, y, z, a], z] == 0$

Out[*]= $x y + 2 a z == 0$

In[*]:= $Aa = D[F[x, y, z, a], a] == 0$

Out[*]= $-12 + x^2 + y^2 + z^2 == 0$

In[*]:= $Solve[\{Aa, Ax, Ay, Az\}]$

Out[*]= $\{\{a \rightarrow 1, x \rightarrow -2, y \rightarrow -2, z \rightarrow -2\}, \{a \rightarrow -1, x \rightarrow 2, y \rightarrow -2, z \rightarrow -2\},$
 $\{a \rightarrow -1, x \rightarrow -2, y \rightarrow -2, z \rightarrow 2\}, \{a \rightarrow 1, x \rightarrow 2, y \rightarrow -2, z \rightarrow 2\},$
 $\{a \rightarrow 0, x \rightarrow -2\sqrt{3}, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0\}, \{a \rightarrow 0, x \rightarrow 2\sqrt{3}, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0\},$
 $\{a \rightarrow 0, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow -2\sqrt{3}\}, \{a \rightarrow 0, x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 2\sqrt{3}\},$
 $\{a \rightarrow -1, x \rightarrow -2, y \rightarrow 2, z \rightarrow -2\}, \{a \rightarrow 1, x \rightarrow 2, y \rightarrow 2, z \rightarrow -2\},$
 $\{a \rightarrow 1, x \rightarrow -2, y \rightarrow 2, z \rightarrow 2\}, \{a \rightarrow -1, x \rightarrow 2, y \rightarrow 2, z \rightarrow 2\},$
 $\{a \rightarrow 0, x \rightarrow 0, y \rightarrow -2\sqrt{3}, z \rightarrow 0\}, \{a \rightarrow 0, x \rightarrow 0, y \rightarrow 2\sqrt{3}, z \rightarrow 0\}\}$

Die ersten drei Gleichungen, jeweils mit x, y oder z multipliziert, ergeben - aufsummiert - die Gleichung

In[*]:= $2 a (x^2 + y^2 + z^2) + 3 x y z = 0$

Out[*]= 0

aus der wir, unter Berücksichtigung der vierten Gleichung, die Beziehung

$$a = -x y z / 8$$

erhalten. Diese, in die 1. Gleichung eingesetzt, ergibt

$$2 a x + y z == 0$$

$$\rightarrow -x^2 y z / 4 + y z = 0$$

$$\rightarrow y = 0 \text{ oder } z = 0 \text{ oder } x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad (1)$$

Entsprechendes ergibt sich bei Einsetzen in die 2. und 3. Gleichung.

$$\rightarrow x = 0 \text{ oder } z = 0 \text{ oder } y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \quad (2)$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } z^2 = 4 \rightarrow z = \pm 2 \quad (3)$$

Nun sollten wir alle Fälle untersuchen, also:

$$x^2 = 4 \quad (1) \rightarrow (z = 0 \quad (2) \rightarrow y^2 = 8 \quad (Aa))$$

und so weiter. Aus Symmetriegründen finden wir also die Lösungen

$$(x^2, y^2, z^2) = (4, 4, 4) \text{ und Permutationen von } (0, 4, 8).$$

Die Werte von (x,y,z) sind entsprechend Permutationen von

$$(\pm 2, \pm 2, \pm 2) \text{ und } (0, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}), \text{ mit den Werten von } q = \pm 8 \text{ und } 0.$$

Das Maximum q = 8 wird also bei folgenden vier Punkten angenommen :

$$(x,y,z) = (2,2,2), (2,-2,-2), (-2,2,-2), (-2,-2,2)$$

Mit *Mathematica* lautet die Rechnung

```
In[ ]:= Lösungen = Solve[{Ax, Ay, Az, Aa}]
```

```
Out[ ]:= {{a -> 1, x -> -2, y -> -2, z -> -2}, {a -> -1, x -> -2, y -> -2, z -> 2},
  {a -> -1, x -> -2, y -> 2, z -> -2}, {a -> 1, x -> -2, y -> 2, z -> 2},
  {a -> 0, x -> 0, y -> 0, z -> -2 Sqrt[3]}, {a -> 0, x -> 0, y -> 0, z -> 2 Sqrt[3]},
  {a -> 0, x -> 0, y -> -2 Sqrt[3], z -> 0}, {a -> 0, x -> 0, y -> 2 Sqrt[3], z -> 0},
  {a -> -1, x -> 2, y -> -2, z -> -2}, {a -> 1, x -> 2, y -> -2, z -> 2},
  {a -> 1, x -> 2, y -> 2, z -> -2}, {a -> -1, x -> 2, y -> 2, z -> 2},
  {a -> 0, x -> -2 Sqrt[3], y -> 0, z -> 0}, {a -> 0, x -> 2 Sqrt[3], y -> 0, z -> 0}}
```

```
In[ ]:= Werte = x y z /. Lösungen
```

```
Out[ ]:= {-8, 8, 8, -8, 0, 0, 0, 0, 8, -8, -8, 8, 0, 0}
```

Das bestätigt unsere Rechnung von oben.

Wie sieht diese Ladungsverteilung auf der Kugelfläche eigentlich aus?

Wir zeichnen die Ladungsdichtefunktion

$$q(x,y,z) = xyz \sim \cos[p] \sin[p] \sin[t]^2 \cos[t]$$

auf der Kugeloberfläche und deuten die Werte durch die Farbverteilung an (heiß: rot, kalt= blau).

Die entsprechende Funktion verwendet Kugelkoordinaten (vgl. Anhang A) zur Darstellung.

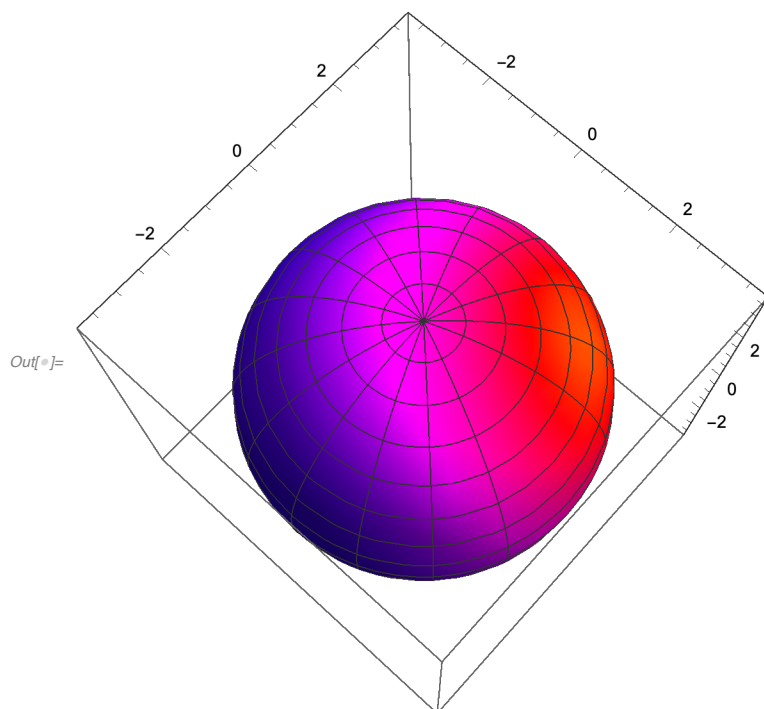
```
In[ ]:= R = Sqrt[12];
```

```
ParametricPlot3D[
```

```
{R Cos[p] Sin[t], R Sin[p] Sin[t], R Cos[t]}, {p, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi},
```

```
ColorFunction -> Function[{x, y, z}, Hue[0.7 (1 + x y z)]],
```

```
PlotPoints -> {30, 30}, ViewPoint -> {0.712, -0.785, 3.214}]
```



```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.38

Die Ergebnisse optischer Messungen der Entfernung eines UFOs von einer Radarstation aus haben zu den Zeitpunkten $t=0, 1, 2$ s eine Distanz von 0.5, 2.0 und 4.0 Erdradien ergeben. Man nimmt an, dass die Entfernung y linear von der Zeit abhängt, das UFO hätte also eine konstante Geschwindigkeit $y=vt+b$. Bestimmen Sie v und b , sodass die Summe der Quadrate der Abweichungen von den gemessenen Werten, also

$$(0.5 - y(t=0))^2 + (2.0 - y(t=1))^2 + (4.0 - y(t=2))^2$$

ein Minimum wird.

Lösungsweg

Man nimmt an, die Geschwindigkeit hätte die Form

```
In[ ]:= y[t_] = v t + b;
```

Es ergibt sich die zu minimierende Funktion zu

```
In[ ]:= S[v_, b_] = (0.5 - y[0])^2 + (2 - y[1])^2 + (4 - y[2])^2
```

```
Out[ ]:= (0.5 - b)^2 + (2 - b - v)^2
```

```
Out[ ]:= (4 - b - 2 v)^2
```

```
In[ ]:= Simplify[S[v, b]]
```

```
Out[ ]:= (-0.5 + b)^2 + (-2 + b + v)^2
```

Das Minimum folgt aus den beiden partiellen, ersten Ableitungen nach den Parametern b und v :

```
In[ ]:= Solve[{
    D[S[v, b], v] == 0,
    D[S[v, b], b] == 0},
    {v, b}]
```

```
Out[ ]:= {{v -> 1.5, b -> 0.5}}
```

Mathematica hat hier einen numerischen Wert angegeben, der aber auch durch einen Bruch ausdrückbar ist:

```
In[ ]:= N[5/12]
```

```
Out[ ]:= 0.416667
```

Damit haben wir das Ergebnis: $v=7/3$, $b=5/12$.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```

4.39

Stellen Sie die Temperaturverteilung einer rechteckigen Platte

$$T(0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 6) = x^2 y / 2 - x y^2 / 4 + 200$$

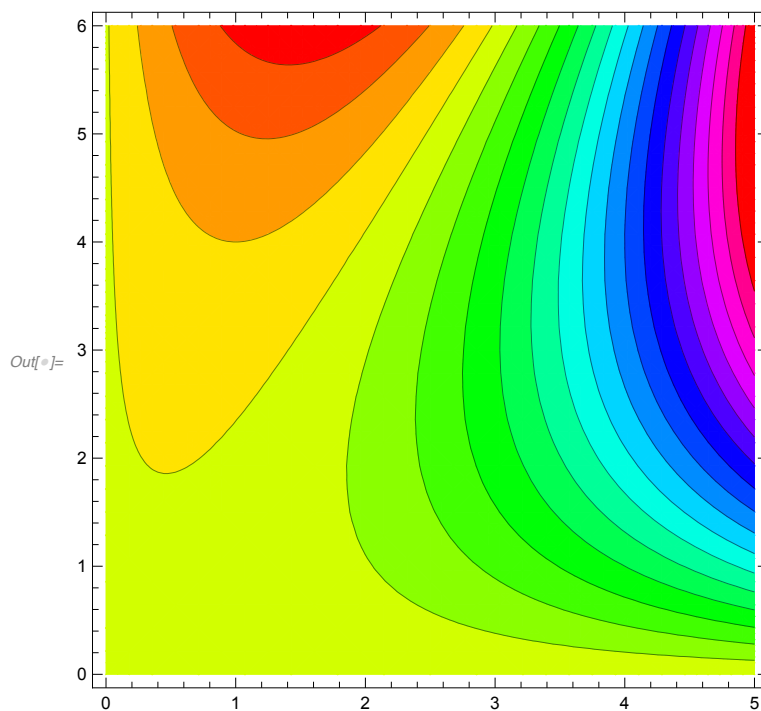
durch Isothermen (Linien gleicher Temperatur) graphisch dar. Wo ist der kälteste Punkt und wo der wärmste? Wie verläuft die analytische Rechnung?

Lösungsweg

```
In[ ]:= T[x_, y_] = x^2 y / 2 - x y^2 / 4 + 200;
```

Zuerst verschaffen wir uns einen Überblick über die Temperaturverteilung:

```
In[ ]:= ContourPlot[T[x, y], {x, 0, 5}, {y, 0, 6},
  Contours -> 20, ColorFunction -> Hue]
```



Nun die analytische Rechnung, im Inneren und am Rand.

Inneres:

Dort kann man etwaige Extremalwerte durch Differenziation bestimmen.

```
In[ ]:= Solve[{
  D[T[x, y], x] == 0,
  D[T[x, y], y] == 0,
  {x, y}]
```

```
Out[ ]:= {{x -> 0, y -> 0}, {x -> 0, y -> 6}}
```

```
In[ ]:= T[x, y] /. %
```

```
Out[ ]:= {200, 200}
```

Es handelt sich also nur um einen Extremalpunkt.

Nun untersuchen wir die Ränder.

Oberer Rand:

In[*]:= T[x, 6]

Out[*]= $200 - 9x + 3x^2$

In[*]:= Solve[D[T[x, 6], x] == 0, x]

N[T[x, 6]] /. %

Out[*]= $\left\{\left\{x \rightarrow \frac{3}{2}\right\}\right\}$

Out[*]= {193.25}

Unterer Rand

In[*]:= T[x, 0]

Out[*]= 200

Hier ist die Temperatur konstant.

Rechter Rand

In[*]:= T[5, y]

Out[*]= $200 + \frac{25y}{2} - \frac{5y^2}{4}$

In[*]:= Solve[D[T[5, y], y] == 0, y]

N[T[5, y]] /. %

Out[*]= $\left\{\left\{y \rightarrow 5\right\}\right\}$

Out[*]= {231.25}

Linker Rand

In[*]:= T[0, y]

Out[*]= 200

Auch hier ist die Temperatur konstant.

Ecken

An drei der Ecken wird die Temperatur den Wert 200 haben, da sie ja am oberen und linken Rand diesen Wert hat.

In[*]:= T[0, 0]

Out[*]= 200

In[*]:= T[0, 6]

Out[*]= 200

In[*]:= T[5, 0]

Out[*]= 200

In[*]:= T[5, 6]

Out[*]= 230

Wir fassen zusammen: Der wärmste Punkt liegt bei (5,5) mit $T=231.25$ Grad, der kälteste bei (1.5,6) mit $T=193.25$ Grad.

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"];
```