Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 5. Integralrechnung

5.1

Finden Sie für die Kurve $y=x^2$ im Bereich $0 \leq x \leq 2$

(a) die Bogenlänge;

(b) das Volumen des Drehkörpers um die x-Achse;

(c) die gekrümmte Oberfläche dieses Körpers;

(d) die Schwerpunkte des Bogens und der Fläche unter der Kurve.

Bestimmen Sie die Trägheitsmomente (Massendichte 1) in Bezug auf eine Drehung um die x-Achse

(e) der Fläche unter der Kurve,

(f) eines Drahtes mit der Form des Bogens,

(g) einer Schale mit der Form der Oberfläche (c),

(h) des Drehkörpers (b).

Lösungsweg

Das differentielle Element der Bogenlänge ist

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + 4\, x^2}\, dx$$

(a) Bogenlänge

In[∘]:= $\text{Bogenlänge} = \int_0^2 \sqrt{1 + 4 x^2}\, dx$

Out[∘]= $\sqrt{17} + \frac{\text{ArcSinh}[4]}{4}$

Da die Massendichte konstant 1 ist, ist der Wert der Bogenlänge aus (a) auch jener der Gesamtmasse des Bogens.

In[∘]:= `Bogenmasse = Bogenlänge`

Out[∘]= $\sqrt{17} + \frac{\text{ArcSinh}[4]}{4}$

In[∘]:= `N[Bogenlänge]`

Out[∘]= 4.64678

(b) Volumen des Drehkörpers um die x-Achse

Das Volumenelement eines Drehkörpers ist (in der Form von Scheibendifferentialen geschrieben)

$dV = y^2 \pi\, dx = x^4 \pi\, dx$

und das Volumenintegral ergibt

In[∘]:= $\text{Drehkörpervolumen} = \int_0^2 x^4 \pi\, dx$

Out[∘]= $\frac{32 \pi}{5}$

Alternativ könnten wir auch so vorgehen:

$dV=2 y \pi\, dy\, dx$

In[∘]:= $\text{Drehkörpervolumen} = \int_0^2 \int_0^{x^2} 2 y \pi\, dy\, dx$

Out[∘]= $\frac{32 \pi}{5}$

(c) Gekrümmte Oberfläche dieses Körpers

Das Flächenelement ist

$dA = 2 y \pi\, ds = 2 x^2 \pi \sqrt{1 + 4 x^2}\, dx$

Partielle Integration ergibt schließlich

In[∘]:= $A = \frac{2 \pi}{64} \left(2 \sqrt{1 + 4 x^2} \left(x + 8 x^3\right) - \text{ArcSinh}[2 x]\right);$

In[∘]:= `Oberfläche = (A /. x → 2) - (A /. x → 0)`

Out[∘]= $\frac{1}{32} \pi \left(132 \sqrt{17} - \text{ArcSinh}[4]\right)$

In[∘]:= $N\left[\frac{1}{32} \pi \left(132 \sqrt{17} - \text{ArcSinh}[4]\right)\right]$

Out[∘]= 53.226

(d) Schwerpunkte des Bogens und der Fläche unter der Kurve

Bogen:

Da die Massendichte konstant 1 ist, ist der Wert der Bogenlänge aus (a) auch jener der Gesamtmasse des Bogens.

Ebenso ist ds=dM.

Die Schwerpunktskoordinaten sind daher

$$Xs = \int x \, dM \; / \; M = \int x \, ds \, / \, M, \quad M = \text{Bogenmasse}$$

In[∘]:= $\int_0^2 x \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

Out[∘]= $\frac{1}{12} \left(-1 + 17 \sqrt{17}\right)$

In[∘]:= $Xs = N\left[\frac{1}{12} \left(-1 + 17 \sqrt{17}\right) \Big/ \text{Bogenmasse}\right]$

Out[∘]= 1.23908

$$Ys = \int y \, dM \; / \; M = \int x^2 \, ds \, / \, M$$

In[∘]:= $\int_0^2 x^2 \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

Out[∘]= $\frac{1}{64} \left(132 \sqrt{17} - \text{ArcSinh}[4]\right)$

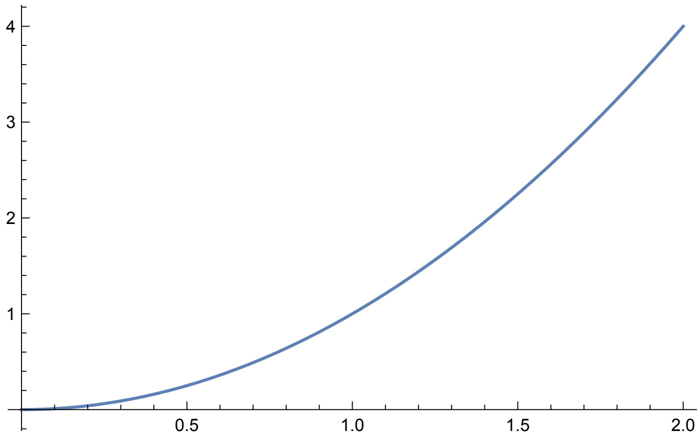
In[∘]:= $Ys = N\left[\frac{1}{64} \left(132 \sqrt{17} - \text{ArcSinh}[4]\right) \Big/ \text{Bogenmasse}\right]$

Out[∘]= 1.82302

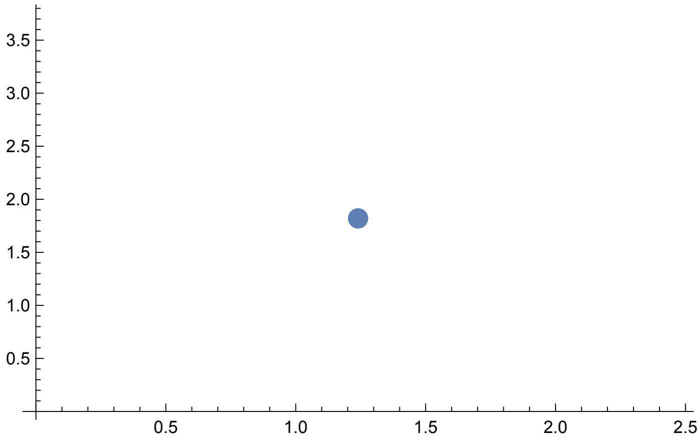
Die Schwerpunktkoordinaten sind (1.23908, 1.82302). Wir betrachten das anhand einer Skizze:

In[∘]:= `PA = Plot[x^2, {x, 0, 2}, DisplayFunction → Identity]`

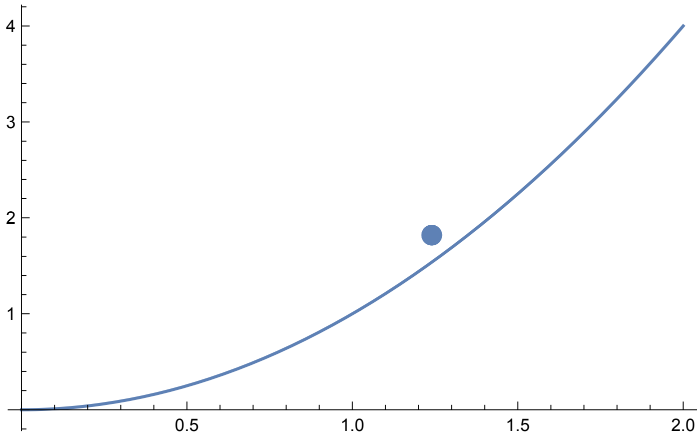
Out[∘]=



In[∘]:=
```
PB = ListPlot[{{1.24, 1.82}},
  PlotStyle → PointSize[0.03], DisplayFunction → Identity]
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
Show[PA, PB, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

Out[∘]=


Der Schwerpunkt liegt nicht auf dem Bogen!

Fläche:

Da die Massendichte konstant 1 ist, ist der Wert der Fläche auch jener der Gesamtmasse der Fläche.

In[∘]:= $\text{Bogenfläche} = \int_0^2 x^2 \, dx$

Out[∘]= $\frac{8}{3}$

Der Massenschwerpunkt ergibt sich aus

In[∘]:= $\text{Xs} = \frac{1}{\text{Bogenfläche}} \int_0^2 \int_0^{x^2} x \, dy \, dx$

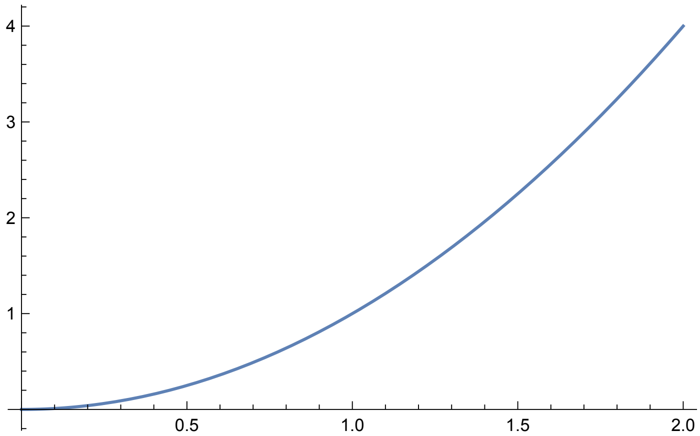
Out[∘]= $\frac{3}{2}$

In[∘]:= $\text{Ys} = \frac{1}{\text{Bogenfläche}} \int_0^2 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx$

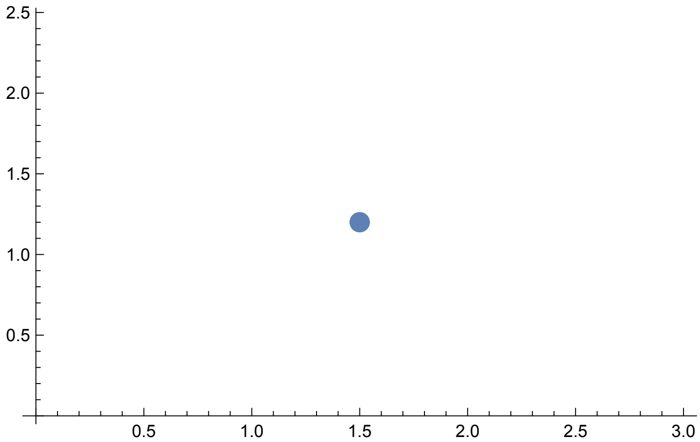
Out[∘]= $\frac{6}{5}$

und ist also (1.5,1.2).

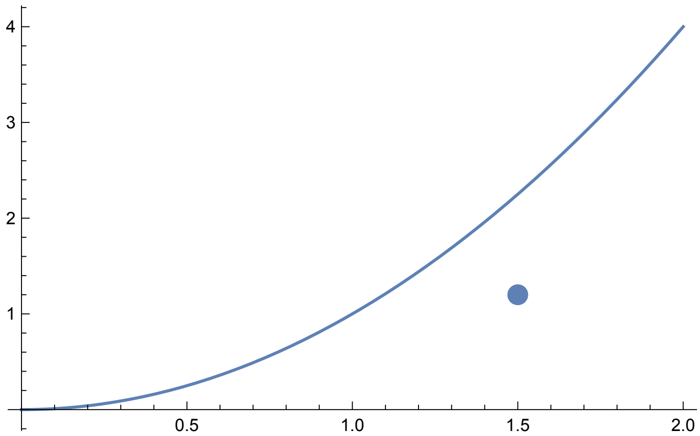
In[ ]:=
```
PA = Plot[x^2, {x, 0, 2}, DisplayFunction → Identity]
```

Out[ ]= 

In[ ]:=
```
PB = ListPlot[{{1.5, 1.2}},
  PlotStyle → PointSize[0.03], DisplayFunction → Identity]
```

Out[ ]= 

In[ ]:=
```
Show[PA, PB, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

Out[ ]= 

(e) Trägheitsmoment der Fläche unter der Kurve

Das Differential des Trägheitsmoments der Fläche (Drehung um die x-Achse) ist

$dI = y^2\, dM = y^2\, dy\, dx$

und das Integral ergibt

In[•]:= FlächeI = $\int_0^2 \int_0^{x^2} y^2 \, dy \, dx$

Out[•]= $\frac{128}{21}$

In Vielfachen der Masse ist dies

In[•]:= FlächeI / Bogenfläche

Out[•]= $\frac{16}{7}$

(f) Trägheitsmoment eines Drahtes mit der Form des Bogens

Das Differential des Trägheitsmoments des Bogens (Drehung um die x-Achse) ist

$dI = y^2 \, dM = x^4 \, ds = x^4 \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

und das Integral ergibt

In[•]:= BogenI = $\int_0^2 x^4 \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

Out[•]= $\frac{8308 \sqrt{17} + 3 \, \text{ArcSinh}[4]}{1536}$

In[•]:= N[BogenI]

Out[•]= 22.3054

In Vielfachen der Masse ist dies

In[•]:= N[BogenI / Bogenmasse]

Out[•]= 4.80017

(g) Trägheitsmoment einer Schale mit der Form der Oberfläche (c)

Das Differential des Trägheitsmoments der Schale (Drehung um die x-Achse) ist

$dI = y^2 \, dM = y^2 \, 2 \, y \, \pi \, ds = 2 \, x^6 \, \pi \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

Dabei haben wir das Massenelement der Oberfläche aus (c) verwendet.Das Integral ergibt

In[•]:= SchaleI = $\int_0^2 2 \, x^6 \, \pi \sqrt{1 + 4 x^2} \, dx$

Out[•]= $\frac{\pi \left(794\,044 \sqrt{17} - 15 \, \text{ArcSinh}[4]\right)}{24\,576}$

In[•]:= N[SchaleI]

Out[•]= 418.508

In[•]:= SchaleI / Oberfläche

Out[•]= $\frac{794\,044 \sqrt{17} - 15 \, \text{ArcSinh}[4]}{768 \left(132 \sqrt{17} - \text{ArcSinh}[4]\right)}$

(h) Trägheitsmoment des Drehkörpers (b)

Das Differential des Trägheitsmoments der Drehkörpers (Drehung um die x-Achse) ist

$dI = y^2\, dM = y^2\, dV = y^2\, 2\, y\, \pi\, dy\, dx = 2\, y^3\, \pi\, dy\, dx$

In[•]:= $\text{DrehkörperI} = \int_0^2 \int_0^{x^2} 2\, y^3\, \pi\, dy\, dx$

Out[•]= $\frac{256\, \pi}{9}$

In[•]:= DrehkörperI / VolumenDrehkörper

Out[•]= $\frac{256\, \pi}{9\, \text{VolumenDrehkörper}}$

Anmerkung: In dieser Rechnung verborgen ist auch die Berechnung des Träheitsmoments einer homogenen Scheibe (Radius R)

$\int_0^R r^2\, r\, dr\, d\varphi = 2\, \pi\, \frac{R^4}{4} = \frac{R^4\, \pi}{2}$

Wenn man das Problem (h) auf eine Summe über Scheiben der Dicke dx und des Radius x^2 zurückführt, erhält man wie vorher:

In[•]:= $\int_0^2 \frac{x^8\, \pi}{2}\, dx$

Out[•]= $\frac{256\, \pi}{9}$

In[•]:= ClearAll["Global`*"];

5.2

Berechnen Sie die von der Ellipse

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

eingeschlossene Fläche.

Lösungsweg

Wir transformieren die Koordinaten x und y auf neue Koordinaten s und t:

$x = a\, s$

$y = b\, t$

$dA = dx\, dy = a\, b\, ds\, dt$

Die Ellipsengleichung hat in diesen Koordinaten die Form einer Kreisgleichung eines Kreises mit Radius 1.

$s^2 + t^2 = 1$

Die Integration (in Polarkoordinaten einfach auszuführen) ergibt

$A = a\, b \int\int ds\, dt = a\, b\, \pi.$

Diese Lösungsmethode ist sehr einfach und schnell.

Man kann diese Aufgabe auch umständlicher in Polarkoordinaten lösen. Die Gleichung wird dann

$x = r\cos(\varphi),\ y = r\sin(\varphi)$

$$\to r^2\,(b^2\,(\cos(\varphi))^2 + a^2\,(\sin(\varphi))^2) = a^2\,b^2$$

$$\to r^2\,(b^2\,(\cos(\varphi))^2 + a^2\,(1 - (\cos(\varphi))^2)) = a^2\,b^2$$

$$\to r^2\,((b^2 - a^2)\,(\cos(\varphi))^2 + a^2) = a^2\,b^2$$

$$\to r^2 = \frac{a^2\,b^2}{(b^2 - a^2)\,(\cos(\varphi))^2 + a^2}$$

Das Flächenelement in Polarkoordinaten ist

$$dA = r\,dr\,d\varphi$$

Die Integrationsgrenzen (von außen nach innen) sind dann durch

$0 \le \varphi < 2\pi,$

$$0 \le r^2 \le \frac{a^2\,b^2}{(b^2 - a^2)\,(\cos(\varphi))^2 + a^2} = R^2(\varphi)$$

gegeben. Wir integrieren zuerst über r:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R^2(\varphi)} dr\,r$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{a^2\,b^2}{(b^2 - a^2)\,(\cos(\varphi))^2 + a^2}$$

Im Kreisfall (a=b) vereinfacht sich der Integrand und wird konstant.

In jedem anderen Fall hat das Integral die Form

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{1 + c\,(\cos\varphi)^2}$$

Dieses Integral kann man durch folgende Umformung lösen

$$1 + c\,(\cos\varphi)^2 = (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + c\,(\cos\varphi)^2$$

$$= (\cos\varphi)^2\,\left((1 + c) + (\tan\varphi)^2\right)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + c}}\tan\varphi,\quad du = \frac{1}{\sqrt{1 + c}}\,\frac{d\varphi}{(\cos\varphi)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{1 + c\,(\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + c}}\int_{u=0}^{\infty} du\,\frac{1}{1 + u^2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + c}}\,\arctan[u]\,\Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + c}}$$

Wir haben

$$\frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{\frac{(b^2 - a^2)}{a^2}\,(\cos(\varphi))^2 + 1}$$

$$= \frac{b^2}{2}\,\frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{(b^2 - a^2)}{a^2}}} = a\,b\,\pi.$$

Dasselbe Ergebnis, aber wohl etwas umständlich berechnet, nicht wahr!

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.3

Stellen Sie für das unbestimmte Integral

$$I[n] = \int dx \cos^n x \quad (n > 1)$$

eine Rekursionsformel auf.

Lösungsweg

Wir leiten partiell ab:

$$I[n] = \int dx\, (\sin x)' \cos^{(n-1)} x$$
$$= \sin x \cos^{(n-1)} x + (n-1) \int dx \sin^2 x \cos^{(n-2)} x$$
$$= \sin x \cos^{(n-1)} x + (n-1) \int dx\, (1 - \cos^2 x) \cos^{(n-2)} x$$
$$= \sin x \cos^{(n-1)} x + (n-1) (I[n-2] - I[n])$$

Wir bringen I[n] auf die linke Seite und finden

$$n\, I[n] = \sin x \cos^{(n-1)} x + (n-1)\, I[n-2] \, .$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.5

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

$$(a) \quad \int dx \frac{2 x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$
$$(b) \quad \int dx \frac{x}{x^4 - 1}$$

Lösungsweg

(a)

Entsprechend (B.20) wählen wir den Ansatz

$$\frac{2 x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{a x + b}{x^2 + 1} + \frac{c x + d}{(x^2 + 1)^2}$$

und multiplizieren mit $(x^2 + 1)^2$:

$$2 x^2 + 3 = (a x + b) \left(x^2 + 1\right) + c x + d$$

$$2x^2+3 = a x^3 + b x^2 + (a+c)\, x + (b+d)$$

Daher:

$$a=0,\ b=2,\ a+c=0,\ b+d=3$$
$$\to a=0,\ b=2,\ c=0,\ d=1$$
$$\to \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Das hätten man auch schneller sehen können, nämlich:

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)+(x^2+2)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Das unbestimmte Integral ist daher (vgl.(5.36)):

$$\int dx\, \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = 2\int dx\, \frac{1}{x^2+1} + \int dx\, \frac{1}{(x^2+1)^2}$$
$$= 2\arctan x + \frac{x}{2\,(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan[x]$$
$$= \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x}{2\,(1+x^2)}$$

Das ist das gesuchte Ergebnis.

Kommentar:
Wir haben dabei für das zweite Integral den Trick (5.37) verwendet:

$$\int dx\, \frac{1}{(x^2+q)^2} = -\frac{\partial}{\partial q}\int dx\, \frac{1}{x^2+q}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\arctan\frac{x}{\sqrt{q}}$$
$$= \frac{x}{2q\,(q+x^2)} + \frac{1}{2q^{3/2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{q}}\right)$$

Für q=1 ergibt das

$$\int dx\, \frac{1}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x}{2\,(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\,.$$

(b)

Der Nenner hat die Vieta-Zerlegung

$$x^4-1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) = \left(x^2+1\right)(x-1)\,(x+1)$$

und der Partialbruchansatz muss daher lauten:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c\,x+d}{x^2+1}$$

Nach Multiplikation mit x^4 - 1 folgt daraus

$$x = a - b - d + a\,x + b\,x - c\,x + a\,x^2 - b\,x^2 + d\,x^2 + a\,x^3 + b\,x^3 + c\,x^3$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$a - b - d = 0$$
$$a + b - c = 1$$
$$a - b + d = 0$$
$$a + b + c = 0$$

und daher

$$a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{4},\ c = -\frac{1}{2},\ d = 0$$

$$\frac{x}{x^4 - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 1} + \frac{\frac{1}{4}}{x + 1} - \frac{\frac{1}{2}\,x}{x^2 + 1}$$

In[∘]:=
```
Integrate[x / (x^2 + 1), x]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}\,\text{Log}\left[1 + x^2\right]$

und das Integral ergibt

$$\frac{1}{4}\ln(x - 1) + \frac{1}{4}\ln(x + 1) - \frac{1}{4}\ln\left(1 + x^2\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.6

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

(a) $\int dx\ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

(b) $\int dx\ \frac{1}{\sin x}$

(c) $\int dx\ x^m \ln x$

(d) $\int dx\ \frac{1}{x^2 - a^2}$

(e) $\int dx\ \sin x\ \cosh x$

Lösungsweg

(a)

Substitution:

$$u = a^2 + x^2,\quad du = 2\,x\,dx$$

$$\to \int dx\ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2}\int du\ u^{-1/2}$$

$$= u^{1/2} = \sqrt{a^2 + x^2} + c$$

(b)

$$\int dx \, \frac{1}{\sin x} = \int dx \, \frac{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)$$

$$= -\int \frac{d\left(\cos \frac{x}{2}\right)}{\cos \frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin \frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= -\ln \left(\cos \frac{x}{2}\right) + \ln \left(\sin \frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \ln \left(\tan \frac{x}{2}\right) + c$$

Wir haben dabei unterwegs die Substitutionen

$u = \cos \frac{x}{2}$ und $u = \sin \frac{x}{2}$

implizit angedeutet.

(c)

Dieses Integral ist wohl am leichtesten durch partielle Integration zu lösen. Man wählt die Integration dabei so, dass nach dem ersten Schritt die Ableitung von ln x gebildet wird.

$$\int dx \; x^m \ln x = \int dx \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' \ln x$$

$$= \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right) \ln x - \int dx \; \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right) \ln x - \int dx \; \frac{x^m}{m+1}$$

$$= \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right) \ln x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} \left((m+1) \ln x - 1 \right) + c,$$

für ganzzahlige $m \geq 0$

(d)

Das folgende Integral ist ein Klassiker, das man natürlich in Tabellen (wie etwa B.1) findet. Etwas umständlicher kann man wie folgt vorgehen:

Partialbruchzerlegung des Integranden ergibt

$$\int dx \; \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2\,a} \int dx \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$$

$$= \frac{1}{2\,a} \left(\ln (x - a) - \ln (x + a) \right) + c$$

$$= \frac{1}{2\,a} \ln \frac{x - a}{x + a} + c$$

Je nach dem Wert von x ($|x|<a$ oder $|x|>a$) kann man dieses Ergebnis auch durch den artanh oder den arcoth ausdrücken.

(e)

$$\int dx \, \sin x \, \cosh x$$

In solchen Fällen empfiehlt sich die Umschreibung in Exponentialfunktionen. Damit klappt es immer.

$$\int dx \, \sin x \, \cosh x = \frac{1}{4\,i} \int dx \, \left(e^{i x} - e^{-i x}\right) \left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,i} \int dx \, \left(e^{x\,(1+i)} - e^{x\,(1-i)} + e^{-x\,(1-i)} - e^{-x\,(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,i} \left(\frac{e^{x\,(1+i)}}{1+i} - \frac{e^{x\,(1-i)}}{1-i} - \frac{e^{-x\,(1-i)}}{1-i} + \frac{e^{-x\,(1+i)}}{1+i}\right)$$

$$= \frac{1}{4\,i} \left(\frac{e^{x\,(1+i)}}{1+i} + \frac{e^{-x\,(1+i)}}{1+i}\right) - \frac{1}{4\,i} \left(\frac{e^{x\,(1-i)}}{1-i} + \frac{e^{-x\,(1-i)}}{1-i}\right)$$

$$= \frac{1}{2\,(1+i)\,i} \cosh(x\,(1+i))$$

$$- \frac{1}{2\,(1-i)\,i} \cosh(x\,(1-i))$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (\cosh(x) \cosh(i x) + \sinh(x) \sinh(i x))$$

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) (\cosh(x) \cosh(-i x) + \sinh(x) \sinh(-i x))$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) (\cosh(x) \cos(x) + i \sinh(x) \sin(x))$$

$$- \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) (\cosh(x) \cos(x) - i \sinh(x) \sin(x))$$

$$= \frac{1}{2} (\sinh(x) \sin(x) - \cosh(x) \cos(x)) + c$$

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

5.7

Bestimmen Sie Masse und Trägheitsmoment in Bezug auf eine Drehung um die Symmetrieachse für

(a) einen Kegel (Radius der Bodenfläche a, Höhe h);

(b) eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a und Höhe h).

Die Dichte wird als konstant angenommen.

Lösungsweg

(a) Kegel

Wir rechnen in Zylinderkoordinaten. Es ist (anhand eine Skizze des Querschnitts leicht zu erkennen):

$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$

$0 < z < h$

$0 < \varphi < 2\pi$

$0 < r < a\left(\frac{h-z}{h}\right)$

$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{a\left(\frac{h-z}{h}\right)} dz\, d\varphi\, dr\, r$

$= \frac{1}{3} a^2 h \pi,$

$\text{Masse} = V\rho = \frac{1}{3} a^2 h \rho \pi$

Trägheitsmoment (Drehung um z-Achse):

$dI_z = \rho\, r^3\, dr\, d\varphi\, dz$

$I_z = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{a\left(\frac{h-z}{h}\right)} dz\, d\varphi\, dr\, r^3$

$= \frac{1}{10} a^4 h \rho\, \pi = \frac{3\, a^2}{10} M$

(b) Quadratische Pyramide

Wir wählen kartesische Koordinaten.

$dV = dx\, dy\, dz$

$0 < z < h$

$-a\left(\frac{h-z}{2\,h}\right) < y < a\left(\frac{h-z}{2\,h}\right)$

$-a\left(\frac{h-z}{2\,h}\right) < x < a\left(\frac{h-z}{2\,h}\right)$

$V = \int_0^h \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} dz\, dy\, dx$

$= \int_0^h dz\, a^2 \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = \frac{a^2 h}{3}$

$\text{Masse} = V\rho = \frac{1}{3} a^2 h \rho$

(Das war natürlich schon bekannt:V= Grundfläche × Höhe/3.)

Trägheitsmoment (Drehung um z-Achse):

$dI_z = \rho\, \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$

$$I_z = \rho \int_0^h \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} dz\, dy\, dx\, \left(x^2 + y^2\right)$$

$$= 2\,\rho \int_0^h \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} \int_{-a\left(\frac{h-z}{2h}\right)}^{a\left(\frac{h-z}{2h}\right)} dz\, dy\, dx\, x^2$$

$$= \frac{a^4\, h\, \rho}{30} = \frac{a^2}{10} M$$

```
In[]:= ClearAll["Global`*"];
```

5.8

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kardioide

$\rho = \cos\text{^}2\,(\varphi / 2)$

im ersten Quadranten.

Lösungsweg

Wie sieht die Kardioide aus? Ausgedrückt durch ρ und φ lauten die Koordinaten

x = ρ Cos[φ]; y = ρ Sin[φ];

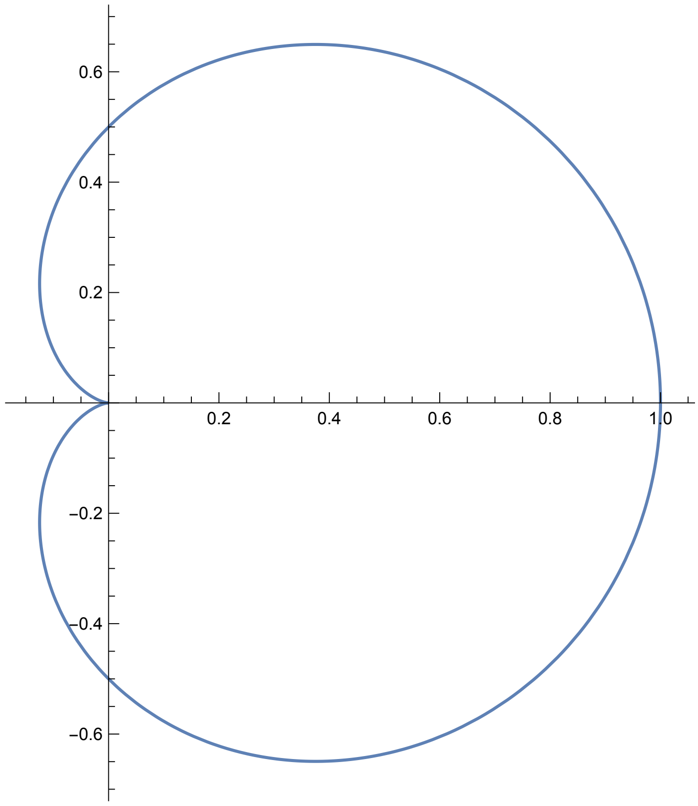
Daraus folgt auf der Kurve:

x = Cos[φ / 2] ^2 Cos[φ]; y = Cos[φ / 2] ^2 Sin[φ];

Wir plotten die Kardioide daher mit dem Befehl

In[•]:=
```
ParametricPlot[{
        Cos[phi/2]^2 Cos[phi],
        Cos[phi/2]^2 Sin[phi]},
    {phi, 0, 2 Pi}]
```

Out[•]=



Jetzt wissen wir, warum diese Kurve diesen Namen hat. Im ersten Quadranten ist die Funktion eindeutig. Wir benötigen das Differenzial der Bogenlänge:

`ds = Sqrt[(dx)^2 + (dy)^2],`

das wir diesmal am besten durch dφ ausdrücken:

In[•]:= `dx = D[Cos[φ/2]^2 Cos[φ], φ] dφ`

Out[•]= $d\varphi\left(-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\mathrm{Sin}[\varphi]\right)$

In[•]:= `dy = D[Cos[φ/2]^2 Sin[φ], φ] dφ`

Out[•]= $d\varphi\left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\mathrm{Cos}[\varphi]-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Sin}[\varphi]\right)$

In[•]:= `ds2 = dx^2 + dy^2`

Out[•]= $d\varphi^2\left(-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\mathrm{Sin}[\varphi]\right)^2+$
$d\varphi^2\left(\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2\mathrm{Cos}[\varphi]-\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{\varphi}{2}\right]\mathrm{Sin}[\varphi]\right)^2$

In[•]:= `Simplify[ds2]`

Out[•]= $d\varphi^2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2$

Damit haben wir

$$ds = \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] d\varphi$$

Die gesuchte Bogenlänge erhalten wir durch Integration von φ=0 bis π/2:

In[∘]:=
```
Integrate[Cos[φ/2], {φ, 0, π/2}]
```

Out[∘]= $\sqrt{2}$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

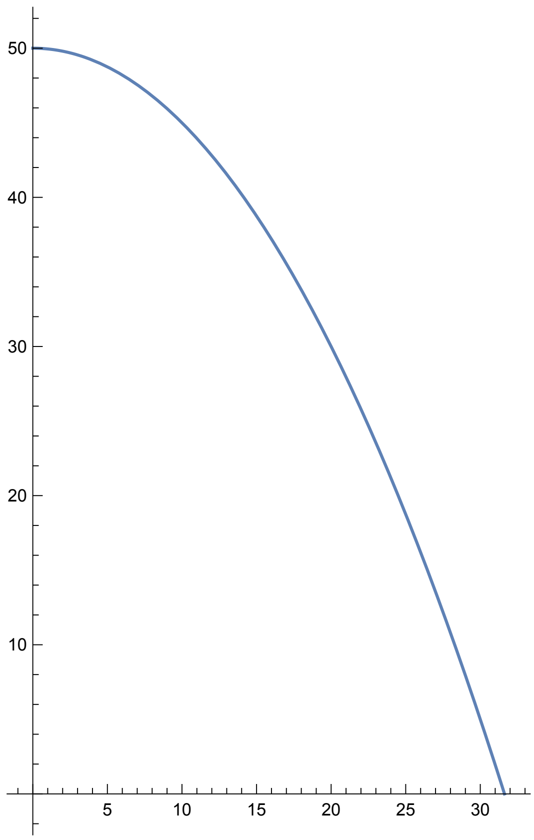
5.9

Von der Spitze eines Turmes (Höhe h) wird ein Ball in horizontaler Richtung (Geschwindigkeit v) geworfen (der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt). Die Bahnkurve als Funktion der Zeit ist dann durch x=v t, y=h-g t^2/2 gegeben (g bezeichnet die Erdbeschleunigung). Berechnen Sie die Länge der Flugbahn, bis der Ball am Boden aufprallt.

Lösungsweg

Wir zeichnen die Wurfparabel (mit der Wahl v=10, h=50,g=10):

In[∘]:=
```
ParametricPlot[
 Evaluate[{v t, h - g t^2/2} /. {h -> 50, v -> 10, g -> 10}], {t, 0, Sqrt[10]}]
```

Out[∘]=


Der Ball prallt zum Zeitpunkt t = $\sqrt{2\,h/g}$ am Boden auf, wie wir durch Auflösung der Beziehung $y = h - g\,t^2/2 = 0$ sehen.

Wir müssen das Integral

$$\int_0^{\sqrt{2\,h/g}} d\,s\,(t)$$

berechnen, wobei s(t) der durch t parametrisierte Bogenparameter ist.

Wegen

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

folgt

$$ds\,(t) = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

$$= \sqrt{v^2 + g^2\,t^2}\ dt$$

mit der Integration

$$S = \int_0^{\sqrt{2\,h/g}} dt\,\sqrt{v^2 + g^2\,t^2}$$

Wir substituieren

$$z = \frac{g}{v}\,t,\ \ dz = \frac{g}{v}\,dt$$

und finden

$$S = \frac{v^2}{g}\int_{t=0}^{t=\sqrt{2\,h/g}} dz\,\sqrt{1 + z^2}$$

Mit z = sinh u, $\sqrt{1+z^2}$ = cosh u ergibt sich

$$S = \frac{v^2}{g}\int_{t=0}^{t=\sqrt{2\,h/g}} du\,(\cosh u)^2$$

$$= \frac{v^2}{2\,g}\int_{t=0}^{t=\sqrt{2\,h/g}} du\,(1 + \cosh 2\,u)$$

$$= \frac{v^2}{2\,g}\left(u + \frac{1}{2}\sinh 2\,u\right)\Big|_{t=0}^{t=\sqrt{2\,h/g}}$$

Es ergibt sich daraus

$$S = \frac{v^2}{4\,g}\,(2\,u + \sinh 2\,u)$$

$$\text{mit } u = \operatorname{ArcSinh}\left(\frac{\sqrt{2\,hg}}{v}\right)$$

In unserem Zahlenbeispiel (Kurve oben) ist das

In[∘]:=
```
ArcSinh[Sqrt[2 h g]/v] /. {h -> 50, v -> 10, g -> 10}
```
Out[∘]= $\text{ArcSinh}\left[\sqrt{10}\right]$

In[∘]:=
```
N[v^2/(4 g) (2 u + Sinh[2 u]) /. {u -> ArcSinh[Sqrt[10]], h -> 50, v -> 10, g -> 10}]
```
Out[∘]= 61.7832

also eine Strecken von ca. 62 m.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.10

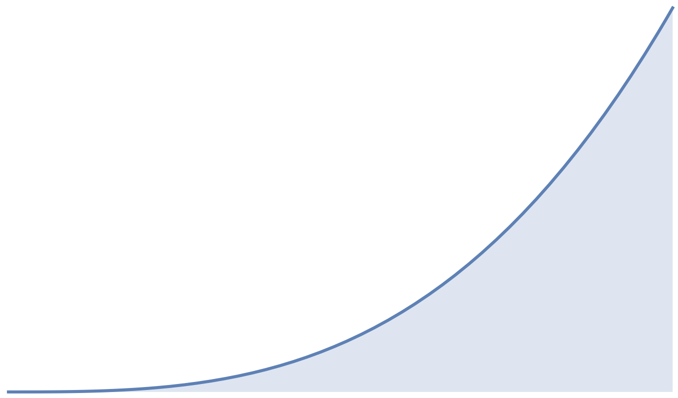
Betrachten Sie eine dünne Platte, deren Form durch die Grenzen x=0, x=1, y=0 und y=x^3 gegeben ist; die Massendichte ist ρ(x,y)=x y^2.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des Massenschwerpunkts der Platte.

(b) Das Trägheitsmoment eines Massenpunkts der Masse dM im Abstand r von der Drehachse ist dI=r^2 dM. Wie groß ist das Trägheitsmoment der Platte, wenn die Drehachse die x-Achse (I_x), die y-Achse (I_y) oder die z-Achse(I_z) ist? Geben Sie das Trägheitsmoment in Vielfachen der Masse an!

Lösungsweg

In[∘]:=
```
Plot[x^3, {x, 0, 1}, PlotRange -> All, Axes -> False, Filling → Bottom]
```
Out[∘]=



(a) Massenschwerpunkt

Die Masse ist

$$M = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, \rho\,(x,\ y)$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x\, y^2 = \int_{x=0}^{1} dx\, x\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{x^3}$$

$$= \int_{x=0}^{1} dx\, \frac{x^{10}}{3} = \frac{1}{33}$$

Die Koordinaten sind

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x\, \rho\,(x,\, y)$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x^2\, y^2$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, x^2 \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{x^3}$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, \frac{x^{11}}{3} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, y\, \rho\,(x,\, y)$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x\ y^3$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, x \left(\frac{y^4}{4}\right)_0^{x^3}$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, \frac{x^{13}}{4} = \frac{33}{56}$$

(b) Trägheitsmoment

Drehung um die x-Achse (Abstand=y):

$$I_x = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, y^2\, \rho\,(x,\, y)$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x\, y^4$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, x \left(\frac{y^5}{5}\right)_0^{x^3}$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, \frac{x^{16}}{5} = \frac{33}{85}$$

Drehung um y-Achse (Abstand=x):

$$I_y = \frac{1}{M} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x^2\, \rho\,(x,\, y)$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, x^3\, y^2$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, x^3 \left(\frac{y^3}{3}\right)_0^{x^3}$$

$$= 33 \int_{x=0}^{1} dx\, \frac{x^{12}}{3} = \frac{33}{39} = \frac{11}{13}$$

Drehung um z-Achse (Abstandsquadrat=$x^2 + y^2$):

$$I_z = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x^3} dx\, dy\, \left(x^2 + y^2\right) \rho\,(x,\, y)$$

$$= I_x + I_y = \frac{33}{85} + \frac{11}{13} = \frac{1364}{1105}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.11

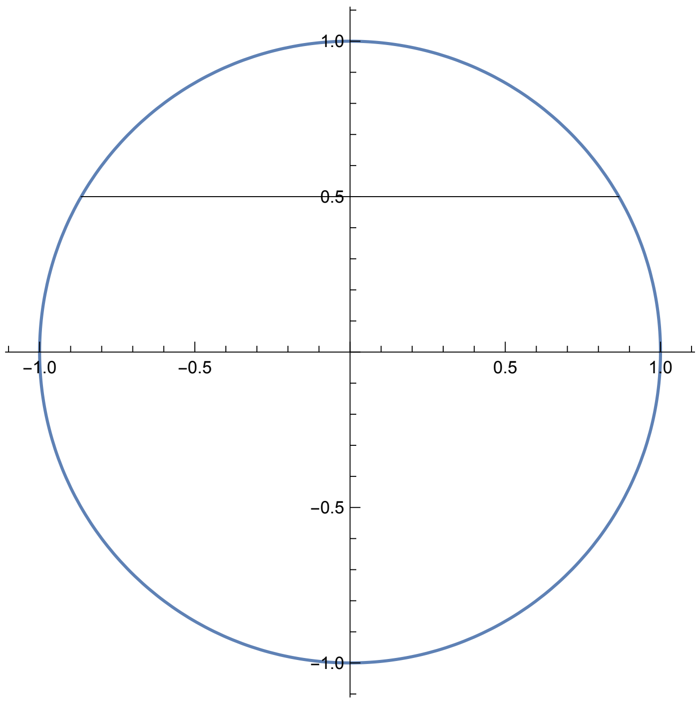
Berechnen Sie mit der Methode von (5.64) die aktuelle Füllmenge eines kugelförmigen Tanks, dessen Anzeige nur die Füllhöhe h ($0 \leq h \leq 2R$) angibt!

Lösungsweg

Ein Tankquerschnitt hat also folgendes Aussehen:

In[∘]:=
```
Show[ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, DisplayFunction -> Identity],
 Graphics[{Line[{{-Sqrt[3]/2, 1/2}, {Sqrt[3]/2, 1/2}}]}],
 AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[∘]=



Wir wählen die senkrechte Richtung als Variable z und finden folgende Integrationsgrenzen

$-R \leq z \leq h - R$

$-\sqrt{R^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - z^2}$

$-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$

Die Volumenintegration über die beiden inneren Variable x und y ergibt die Kreisfläche (vgl. (5.64)) und daher lautet das Integral

$$V\,(h) = \pi \int_{-R}^{h-R} dz\, \left(R^2 - z^2\right) = \pi \left(R^2\, z - \frac{z^3}{3}\right)_{-R}^{h-R}$$

$$= \left(h^2 R - \frac{h^3}{3}\right) \pi .$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

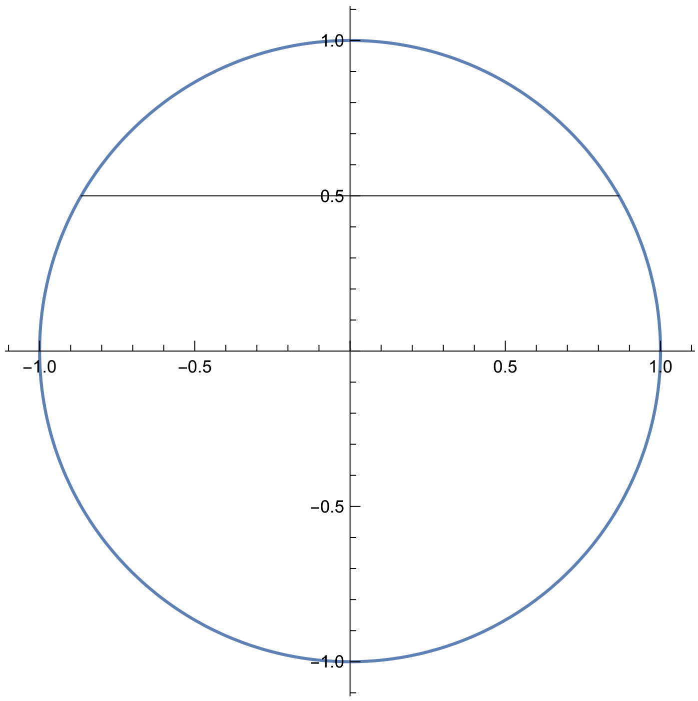
5.12

Berechnen Sie den Inhalt eines zylinderförmigen, liegenden Öltanks (Länge L, Radius R) in Abhängigkeit von der Füllhöhe h.

Lösungsweg

Wir stellen uns den Zylinder liegend vor, mit der Symmetrieachse als z-Achse. Ein Querschnitt in der x-y-Ebene hat dann die Form

In[•]:=
```
Show[ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, DisplayFunction -> Identity],
 Graphics[{Line[{{-Sqrt[3] / 2, 1 / 2}, {Sqrt[3] / 2, 1 / 2}}]}],
 AspectRatio -> 1, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[•]=


Das Volumselement ist (in kartesischen Koordinaten)

$dA = L\, dx\, dy$

und die Integrationsgrenzen sind

$-R \le y \le h - R$

$-\sqrt{R^2 - y^2} \le x \le \sqrt{R^2 - y^2}$

Die Volumensintegration über die innere Variable x ergibt

$$V(h) = 2 L \int_{-R}^{h-R} dy \sqrt{R^2 - y^2}$$

Mit der Variablensubstitution

$y = R \sin t, \quad dy = R \cos t \, dt,$

$y = -R: \; t = -\frac{\pi}{2},$

$y = h - R: \; t = \arcsin \frac{h-R}{R}$

erhalten wir

$$V(h) = 2 L R^2 \int_{y=-R}^{h-R} dt \, (\cos t)^2$$

$$= L R^2 \, (t + \sin t \cos t) \Big|_{y=-R}^{h-R}$$

$$= L R^2 \left(t + \sin t \sqrt{1 - (\sin t)^2} \right) \Big|_{y=-R}^{h-R}$$

$$= L R^2 \left(\arcsin \frac{h-R}{R} + \frac{\pi}{2} + \frac{h-R}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{h-R}{R}\right)^2} \right)$$

$$= L R^2 \left(\arcsin \frac{h-R}{R} + \frac{\pi}{2} + \frac{h-R}{R^2} \sqrt{(2R-h)\,h} \right)$$

Wir überprüfen die Plausibilität des Ergebnisses:

$$V(0) = L R^2 \left(\arcsin(-1) + \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= L R^2 \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$V(R) = L R^2 \frac{\pi}{2}$$

$$V(2R) = L R^2 \left(\arcsin(1) + \frac{\pi}{2} \right) =$$
$$= L R^2 \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = L R^2 \pi$$

Diese Ergebnisse entsprechen genau den Fällen leer, halbvoll und voll, wie erwartet.

5.13

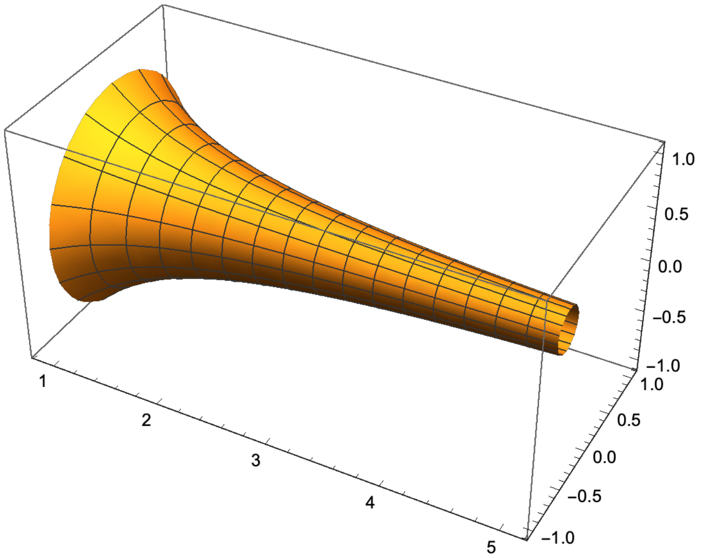
Ein Drehkörper hat die x-Achse als Drehachse, und die Funktion $f(x) = 1/x$ definiert die Oberfläche Die Werte von x liegen zwischen 1 und ∞. Zeigen Sie, dass das Volumen endlich und die Oberfläche unbeschränkt ist!

Lösungsweg

Ein Teilstück (1<x<5) dieses Körpers hat das folgende Aussehen:

In[•]:=
```
ParametricPlot3D[{x, Cos[α] / x, Sin[α] / x}, {x, 1, 5}, {α, 0, 2 π}]
```

Out[•]=



Wir schreiben das Volumenelement in der Form

$dV = (f(x))^2 \pi \, dx$

und finden das Volumen

$$V = \int_1^\infty dx \, \frac{\pi}{x^2} = -\left(\frac{\pi}{x}\right)_1^\infty = \pi \, .$$

Das Differenzial der Oberfläche ist

$$dA = 2\pi f(x) \, ds$$

$$= 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f')^2} \, dx$$

$$= \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$$

Das entsprechende Integral aber ist divergent:

$$A = \int_1^\infty dx \, \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}$$

$$> 2\pi \int_1^\infty dx \, \frac{1}{x} \to \infty$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.14

Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Parabeln

$y = 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x$

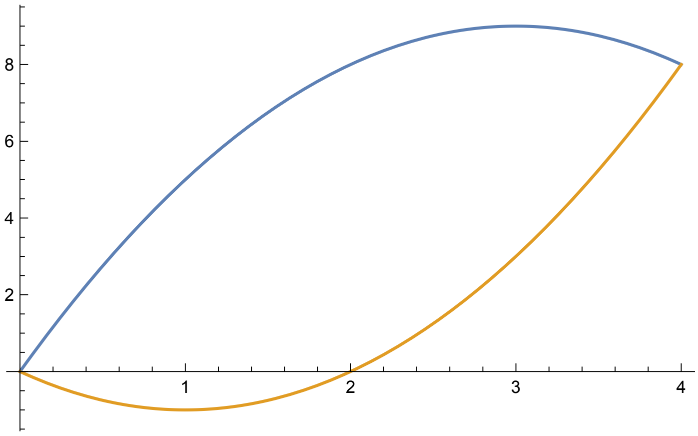
begrenzt wird.

Lösungsweg

Wir erstellen eine Skizze:

```
In[•]:= Plot[{6 x - x^2, x^2 - 2 x}, {x, 0, 4}]
```

Out[•]=



Die Schnittpunkte liegen bei x=0 und x=4, wie wir durch Lösung der Gleichung

```
In[•]:= Solve[6 x - x^2 == x^2 - 2 x, x]
Out[•]= {{x → 0}, {x → 4}}
```

(und aus der Skizze) sehen. Die dazwischenliegende Fläche ist daher

```
In[•]:= Integrate[(6 x - x^2) - (x^2 - 2 x), {x, 0, 4}]
```

Out[•]= $\frac{64}{3}$

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

5.15

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man die Fläche, die durch die Parabel y^2 =12x und die Senkrechte durch ihren Brennpunkt (x=3) begrenzt ist, um diese Senkrechte dreht.

Lösungsweg

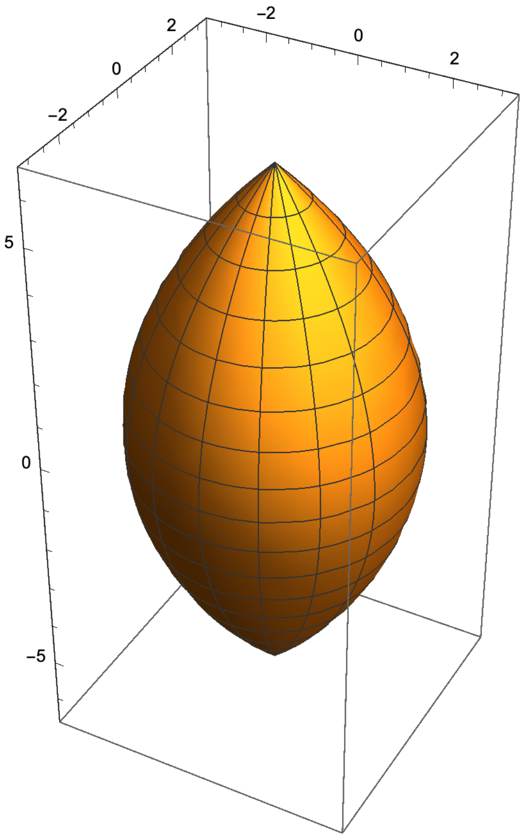
Wir stellen die Situation durch eine Skizze dar:

```
In[•]:= Show[Graphics[Line[{{3, -6}, {3, 6}}], AspectRatio -> 4],
   ParametricPlot[{y^2 / 12, y}, {y, -6, 6}, AspectRatio -> 4,
    DisplayFunction -> Identity], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Wir stellen uns noch den Drehkörper vor:

In[•]:=
```
ParametricPlot3D[{
        (3 - y^2/12) Cos[phi],
        (3 - y^2/12) Sin[phi],
        y}, {phi, 0, 2 Pi}, {y, -6, 6}]
```

Out[•]=



Der Drehkörper entsteht durch Drehung um die senkrechte Achse. Wir zerlegen das Volumen in Scheiben bei festem y mit dem Radius |x(y) -3|. Das differentielle Volumenelement ist daher:

```
dV = dy Pi (x (y) - 3) ^2
```

und die Integration ergibt:

In[•]:=
```
Integrate[Pi (y^2/12 - 3) ^2, {y, -6, 6}]
```

Out[•]= $\frac{288\,\pi}{5}$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

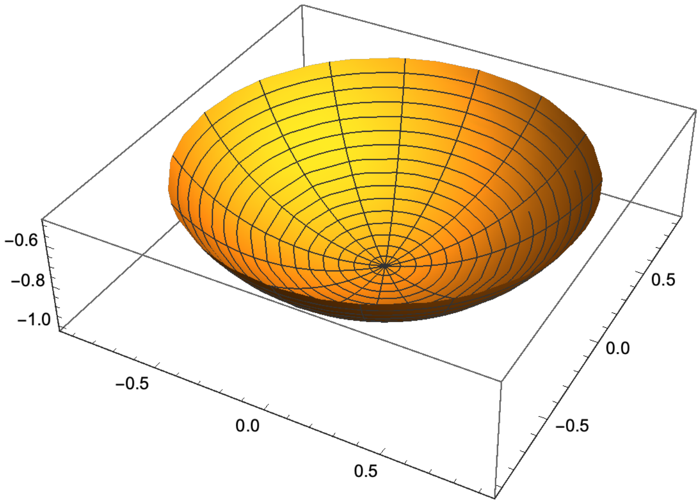
5.16

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Schnittvolumens einer Kugel mit Radius a und eines Kegels mit der Spitze am Mittelpunkt der Kugel und Öffnungswinkel 120°.

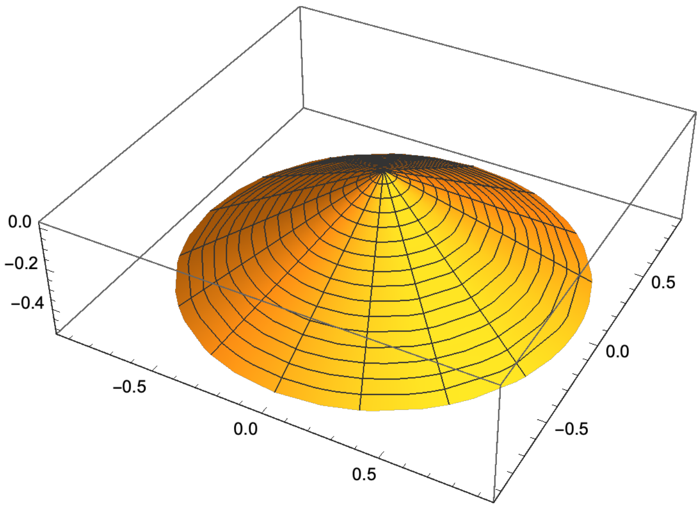
Lösungsweg

Wie sieht dieses seltsame Objekt eigentlich aus?

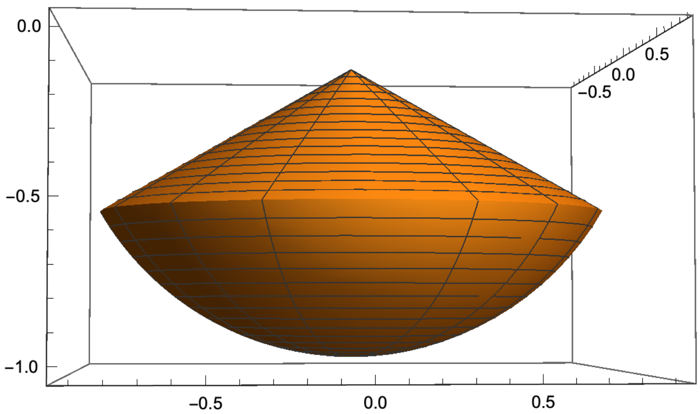
In[•]:=
```
PKugel = ParametricPlot3D[{Cos[p] Sin[t], Sin[p] Sin[t], Cos[t]},
  {p, 0, 2 π}, {t, 2 π / 3, π}, DisplayFunction -> Identity]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
PKegel = ParametricPlot3D[{-z Tan[π / 3] Cos[p], -z Tan[π / 3] Sin[p], z},
  {p, 0, 2 π}, {z, 0, -Cos[π / 3]}, DisplayFunction -> Identity]
```

Out[•]=


In[•]:=
```
Show[{PKugel, PKegel}, ViewPoint -> {3.371, -0.251, -0.161},
 DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[•]=


Wir wählen die Symmetrieachse als z - Achse und haben daher $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$.

Für die Masse und für $\overline{z}$ brauchen wir die Integrationsgrenzen.

Kugelteil, Zylinderkoordinaten:

$$-a < z < -\frac{a}{2} \qquad \left(\frac{1}{2} = \cos(\pi/3)\right)$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

$$0 < r < \sqrt{a^2 - z^2}$$

Zylinder, Zylinderkoordinaten:

$$\frac{-a}{2} < z < 0$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

$$0 < r < -z\sqrt{3} \qquad \left(\sqrt{3} = \tan(\pi/3)\right)$$

$$\text{KugelV} = \int_{-a}^{-\frac{a}{2}} \int_{0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{0}^{2\pi} dz\, dr\, d\varphi\, r$$

$$= \pi \int dz \left(a^2 - z^2\right) = \pi \left(a^2 z - \frac{z^3}{3}\right)_{-a}^{-\frac{a}{2}} = \frac{5 a^3 \pi}{24}$$

$$\text{KegelV} = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \int_{0}^{-z\sqrt{3}} \int_{0}^{2\pi} dz\, dr\, d\varphi\, r$$

$$= \pi \int dz\, 3 z^2 = \pi \left(z^3\right)_{-\frac{a}{2}}^{0} = \frac{a^3 \pi}{8}$$

$$V = \text{KugelV} + \text{KegelV} = \frac{5 a^3 \pi}{24} + \frac{a^3 \pi}{8} = \frac{a^3 \pi}{3}$$

Schwerpunktskoordinate

$$\overline{z} = (\text{IKugel} + \text{IIKegel}) / V$$

$$\text{IKugel} = \int_{-a}^{-\frac{a}{2}} \int_{0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{0}^{2\pi} dz\, dr\, d\varphi\, r\, z$$

$$= \pi \int dz \left(a^2 z - z^3\right) = \pi \left(\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)_{-a}^{-\frac{a}{2}} = -\frac{9 a^4 \pi}{64}$$

$$\text{IKegel} = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \int_{0}^{-z\sqrt{3}} \int_{0}^{2\pi} dz\, dr\, d\varphi\, r\, z$$

$$= \pi \int dz\, 3 z^3 = \pi \left(\frac{3 z^4}{4}\right)_{-\frac{a}{2}}^{0} = -\frac{3 a^4 \pi}{64}$$

In[∘]:= $\overline{z} = \left(-\frac{9 a^4 \pi}{64} - \frac{3 a^4 \pi}{64}\right) / \left(\frac{a^3 \pi}{3}\right)$

Out[∘]= $-\frac{9 a}{16}$

Die Koordinaten des Schwerpunktes dieses Objekts sind daher (0,0,-9a/16).

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

5.17

Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die Funktion

$$A(t) = \int_0^\infty dx\, x^t\, e^{-x}\,, \quad t > -1,$$

der Gleichung

$$A(t) = t\,A(t-1)\,, \quad t > 0$$

genügt. Berechnen Sie A(n) für n∈{0,1,2} explizit als

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b dx\, x^n\, e^{-x}.$$

Lösungsweg

(Bitte beachten Sie: Diese Funktion ist nicht die Gamma-Funktion, sondern es gilt A(t)=Γ(t+1).)

Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^\infty dx\, x^t\, e^{-x} \\ &= -x^t\, e^{-x}\,\Big|_0^\infty + t \int_0^\infty dx\, x^{t-1}\, e^{-x} \\ &= t\, A(t-1) \end{aligned}$$

Dabei muss t>0 sein (bei t=0 ist A(0)=1).

Spezialfälle:

$$n = 0: \int_0^b dx \quad e^{-x} = -e^{-b} + 1$$

$$n = 1: \int_0^b dx \quad x\, e^{-x} = -b\, e^{-b} + \int_0^b dx \quad e^{-x}$$

$$= 1 - e^{-b} - b\, e^{-b}$$

Dabei haben wir im Limes berücksichtigt dass für jede Potenz n gilt, dass

$$\lim_{b\to\infty} (b^n\, e^{-b}) = 0.$$

$$n = 2: \int_0^b dx \quad x^2\, e^{-x} = -b^2\, e^{-b} + 2\int_0^b dx \quad x\, e^{-x}$$

$$= -b^2\, e^{-b} + 2\left(1 - e^{-b} - b\, e^{-b}\right)$$

Wegen A(n)=Γ(n+1)=n! ist das Ergebnis zu erwarten gewesen!

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

5.18

Berechnen Sie

$$\iint_A dx\, dy\, \sqrt{x^2 + y^2}$$

wenn A das Gebiet x^2+y^2≤ 16 ist.

Lösungsweg

Wir wählen zur Berechnung Polarkoordinaten:

$x = r \cos\varphi,$

$y = r \sin\varphi,$

$dx\, dy = r\, dr\, d\varphi,$

$x^2 + y^2 = r^2$

und schreiben das Integral in diesem System

$$\int_{r=0}^{4}\int_{\varphi=0}^{2\pi} dr\, d\varphi\, r^2 = 2\pi\int_{r=0}^{4} dr\, r^2$$

$$= 2\pi\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^4 = \frac{128\pi}{3}$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.20

Benützen Sie die Kenntnis von

$$\int_0^\infty dx\,\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2y},$$

um

$$\int_0^\infty dx\,\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

zu berechnen.

Lösungsweg

Zuerst ein Hinweis: Genau genommen ist das Ergebnis des ersten Integrals nur für positive y wie angegeben. Im allgemeinen Falls ist es

$$I(y) = \int_0^\infty dx\,\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{y^2}} = \frac{\pi}{2\,|\,y\,|}$$

Die grundlegende Idee liegt darin, durch eine Ableitung des Integrals nach einem Parameter das gesuchte Integral zu erhalten. Um dies zu erzielen, müssen wir hier nach y^2 ableiten. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y^2} I(y) = \frac{\partial}{\partial y^2}\int_0^\infty dx\,\frac{1}{x^2+y^2}$$

und daher

$$\int_0^\infty dx\,\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{\partial}{\partial y^2} I(y)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial y^2}\frac{\pi}{2\sqrt{y^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{y^6}} = \frac{\pi}{4\,|\,y^3\,|}.$$

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.21

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y = \int_0^x dt\; f(t)\; E^{x-t}$$

die Differenzialgleichung y' - y = f(x) erfüllt.

Lösungsweg

Wir leiten y nach x ab und verwenden dabei die Regel von Leibniz:

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x dt\; f(t)\; E^{x-t}$$
$$= f(x)\; E^{x-x} + \int_0^x dt\; f(t)\; E^{x-t}$$
$$= f(x) + y(x)$$

Das aber ist genau die gesuchte Differenzialgleichung, y´=f+y.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.22

Gegeben ist die Funktion

$$F(\alpha) = \int_0^\infty dx\; e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}.$$

Berechnen Sie dF/dα, und führen Sie die restliche Integration aus. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um F(α) =$\int$F'(α) dα + C explizit zu berechnen. Daraus können Sie zeigen, dass

$$\int_0^\infty dx\;\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

(Man beachte, dass $\lim_{\alpha\to\infty}$ F(α) =0 ist!)

Lösungsweg

Den Leibniz-Regel (5.51) für Differenziation von Integralen folgend ist

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty dx\; e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$$
$$= -\int_0^\infty dx\; e^{-\alpha x}\sin x$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^\infty dx\ \left[e^{x(i-\alpha)} - e^{x(-i-\alpha)}\right]$$

$$= \frac{i}{2}\left(\frac{e^{x(i-\alpha)}}{i-\alpha} + \frac{e^{x(-i-\alpha)}}{i+\alpha}\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{i-\alpha} + \frac{1}{i+\alpha}\right) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

Daher muss sich F(α) auch durch Integration dieses Ausdrucks ergeben:

$$F(\alpha) = -\int d\alpha\ \frac{1}{1+\alpha^2} + c$$

$$= C - \arctan\alpha$$

Die Integrationskonstante kann man aus dem ursprünglichen Integral ersehen

$$\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = C - \frac{\pi}{2}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty dx\ e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\to C = \frac{\pi}{2}$$

$$\to F(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha$$

Daher ist

$$F(0) = \int_0^\infty dx\ \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

wie angegeben.

In[]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

5.24

Berechnen Sie die Jacobi-Determinante folgender Variablentransformationen:

(a) x = (1 / 2) (u^2 - v^2), y = u v ;

(b) x = a Cosh[u] Cos[v], y = a Sinh[u] Sin[v].

Lösungsweg

Die Jacobideterminante ist

Det[{{∂u x, ∂u y}, {∂v x, ∂v y}}]

(a) Daher

In[]:=
```
x = (1/2) (u^2 - v^2); y = u v;
```

In[]:=
```
JacobiMat = {{D[x, u], D[y, u]}, {D[x, v], D[y, v]}};
```

In[]:=
```
MatrixForm[JacobiMat]
```

Out[]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

In[•]:=
```
JacobiDet = Det[JacobiMat]
```
Out[•]= $u^2 + v^2$

(b)

In[•]:=
```
x = a Cosh[u] Cos[v];   y = a Sinh[u] Sin[v] ;
```

In[•]:=
```
JacobiMat = {{D[x, u], D[y, u]}, {D[x, v], D[y, v]}};
```

In[•]:=
```
MatrixForm[JacobiMat]
```
Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a\,\text{Cos}[v]\,\text{Sinh}[u] & a\,\text{Cosh}[u]\,\text{Sin}[v] \\ -a\,\text{Cosh}[u]\,\text{Sin}[v] & a\,\text{Cos}[v]\,\text{Sinh}[u] \end{pmatrix}$$

In[•]:=
```
JacobiDet = Det[JacobiMat]
```
Out[•]= $a^2\,\text{Cosh}[u]^2\,\text{Sin}[v]^2 + a^2\,\text{Cos}[v]^2\,\text{Sinh}[u]^2$

In[•]:=
```
Simplify[JacobiDet]
```
Out[•]= $-\frac{1}{2}\,a^2\,\left(\text{Cos}[2\,v] - \text{Cosh}[2\,u]\right)$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```