Mathematische Methoden in der Physik

Bonus Unterlagen : Aufgaben und Lösungen

Hinweis : Diese Texte wurden mit Hilfe von WOLFRAM MATHEMATICA 12 (Wolfram Research, Inc.) erstellt.

Viele in diesen Aufgaben gestellten Probleme können mit *Mathematica* direkt durch spezielle Befehle (wie etwa Limit oder Series) gelöst werden. Da es uns hier aber auf das entsprechende Hintergrundwissen ankommt, werden wir meist ausführlicher vorgehen und erst in späteren Rechnungen oder zur Kontrolle diese Befehle verwenden.

Kapitel 9. Integralsätze

9.1

Verifizieren Sie für das Vektorfeld

$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1^2 + x_1 x_3, \ 2 x_2^2, \ -x_3^2/2\right)$

den Satz von Gauß für den Quader, der durch die Ebenen

$x_1 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ und $x_3 = 2$

gebildet wird.

Lösungsweg

Wir definieren

```
In[•]:= Fvec = {x1^2 + x1 x3, 2 x2^2, - x3^2 / 2}
```

Out[•]= $\left\{x1^2 + x1\,x3,\ 2\,x2^2,\ -\frac{x3^2}{2}\right\}$

Wir berechnen die Divergenz

```
In[•]:= DivF = D[Fvec[[1]], x1] +
            D[Fvec[[2]], x2] + D[Fvec[[3]], x3]
```

Out[•]= 2 x1 + 4 x2

```
In[•]:= D[Fvec[[1]], x1]
```

Out[•]= 2 x1 + x3

Die Integrationsgrenzen sind

$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 2$

und das gesuchte Integral daher

```
In[•]:= Integrate[DivF, {x1, 0, 2}, {x2, 0, 1}, {x3, 0, 2}]
Out[•]= 16
```

Nach dem Gaußschen Satz sollte das gleich dem Integral über die Begrenzungsflächen sein:

Beitrag der Fläche bei $x_3 = 0$:

```
In[•]:= nvec = {0, 0, -1}; Integrand = Fvec.nvec /. x3 -> 0
Out[•]= 0

In[•]:= F1 = 0;
```

Beitrag der Fläche bei $x_3 = 2$:

```
In[•]:= nvec = {0, 0, 1}; Integrand = Fvec.nvec /. x3 -> 2
Out[•]= -2

In[•]:= F2 = Integrate[Integrand, {x1, 0, 2}, {x2, 0, 1}]
Out[•]= -4
```

Beitrag der Fläche bei $x_2 = 0$:

```
In[•]:= nvec = {0, -1, 0}; Integrand = Fvec.nvec /. x2 -> 0
Out[•]= 0

In[•]:= F3 = 0;
```

Beitrag der Fläche bei $x_2 = 1$:

```
In[•]:= nvec = {0, 1, 0}; Integrand = Fvec.nvec /. x2 -> 1
Out[•]= 2

In[•]:= F4 = Integrate[Integrand, {x1, 0, 2}, {x3, 0, 2}]
Out[•]= 8
```

Beitrag der Fläche bei $x_1 = 0$:

```
In[•]:= nvec = {-1, 0, 0}; Integrand = Fvec.nvec /. x1 -> 0
Out[•]= 0

In[•]:= F5 = 0;
```

Beitrag der Fläche bei $x_1 = 2$:

```
In[•]:= nvec = {1, 0, 0}; Integrand = Fvec.nvec /. x1 -> 2
Out[•]= 4 + 2 x3

In[•]:= F6 = Integrate[Integrand, {x2, 0, 1}, {x3, 0, 2}]
Out[•]= 12
```

In[•]:=
```
F1 + F2 + F3 + F4 + F5 + F6
```
Out[•]= 16

Damit haben wir den Satz für unser Beispiel verifiziert.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```
In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.2

Berechnen Sie

$$\iint_{S\,(V)} dA \;\; \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$$

mit $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2,\; x_1 x_2^2,\; x_2 x_3^2)$

für S begrenzt durch: x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_2=2 und x_1+x_3=2.

Lösungsweg

Nach dem Gaußschen Satz kann dieses Integral durch das Volumenintegral über **div F** ersetzt werden. Der Integrand ist also

In[•]:=
```
Fvec = {x1^2 x2, x1 x2^2, x2 x3^2};
DivF = D[Fvec[[1]], x1] +
        D[Fvec[[2]], x2] + D[Fvec[[3]], x3]
```
Out[•]= 4 x1 x2 + 2 x2 x3

Die Integrationsgrenzen sind

$0 \leq x_1 \leq 2,\; 0 \leq x_2 \leq 2,\; 0 \leq x_3 \leq 2 - x_1$

und das Ergebnis daher

In[•]:=
```
Integrate[Integrate[DivF, {x3, 0, 2 - x1}],
        {x2, 0, 2}, {x1, 0, 2}]
```
Out[•]= 16

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```
In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.3

S ist eine geschlossene Fläche. Gilt für

$F(x_1, x_2, x_3) = (a\, x_1,\; b\, x_2,\; c x_3)$

die Relation

$$\iint_{S\,(V)} dA \;\; \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = (a + b + c)\; V\; ?$$

Lösungsweg

Nach dem Satz von Gauß ist das Integral gleich dem Volumenintegral über **div F**. Diese ist aber in diesem Beispiel konstant, nämlich (a+b+c). Damit ergibt sich die gesuchte Aussage!

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

9.4

Verifizieren Sie den Satz von Green für die angegebenen Funktionen und geschlossenen Wege:

(a)

$V_1(x_1, x_2) = 2x_1 - 2x_1x_2$,

$V_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + 3$,

$C: (0, -1) \to (\pi/2, 0) : x_2 = -\cos x_1$,

$(\pi/2, 0) \to (0, 1) : x_2 = \cos x_1$,

$(0, 1) \to (0, -1) : x_1 = 0.$

(b)

$V_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 2$,

$V_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$,

$C: (0, 0) \to (1, 0) : x_2 = 0$,

$(1, 0) \to (1, 1) : x_1 = 1$,

$(1, 1) \to (0, 0) : x_2 = \sqrt{x_1}$.

Lösungsweg

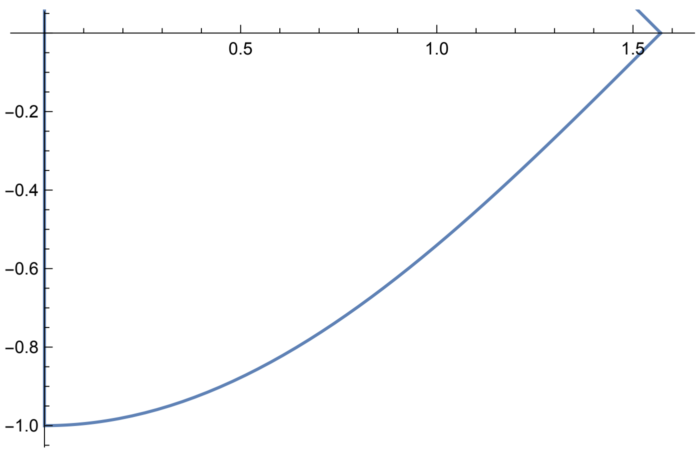
Der Satz von Green ist in (9.19) angegeben.

(a)

Es geht um folgende in positivem Umlaufsinn durchlaufene, geschlossene Kurve C (Teilstücke C1, C2, C3):

```
In[•]:= C1 = ParametricPlot[{x1, -Cos[x1]}, {x1, 0, Pi/2}, DisplayFunction -> Identity];
C2 = ParametricPlot[{x1, Cos[x1]}, {x1, Pi/2, 0}, DisplayFunction -> Identity];
C3 = ParametricPlot[{0, x2}, {x2, 1, -1}, DisplayFunction -> Identity];
Show[C1, C2, C3, DisplayFunction ->
        $DisplayFunction]
```

Out[•]=




```
In[•]:= V1 = 2 x1 - 2 x1 x2;
V2 = x1^2 x2 + 3;
```

Die linke Seite des Satz von Green ist das Flächenintegral über

In[∘]:= `Integrand = D[V2, x1] - D[V1, x2]`

General: Cos[φ] ρ[φ] is not a valid variable.

General: Sin[φ] ρ[φ] is not a valid variable.

Out[∘]= $-\partial_{\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^2\right)+\partial_{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(3+\mathrm{Cos}[\varphi]^2\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^3\right)$

In[∘]:=
```
LinkeSeite = Integrate[
        Integrate[Integrand,
            {x2, -Cos[x1], Cos[x1]}], {x1, 0, Pi/2}]
```

Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Sin[φ] ρ[φ], −Cos[Cos[φ] ρ[φ]], Cos[Cos[φ] ρ[φ]]}.

Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in $\left\{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi], 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Out[∘]= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-\mathrm{Cos}[\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]]}^{\mathrm{Cos}[\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]]}\left(-\partial_{\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^2\right)+\partial_{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(3+\mathrm{Cos}[\varphi]^2\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^3\right)\right)\,d\left(\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)\right)\,d\left(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$

Die rechte Seite ist ein aus drei Teilen (C1, C2, C3) bestehendes Linienintegral der Form

$$\int_C dx_1\, V1\,(x_1,\, x_2\,(x_1)) + \int_C dx_2\, V2\,(x_1\,(x_2),\, x_2)$$

Die Integration entlang C1 ergibt

In[∘]:=
```
C1A = Integrate[V1 /. x2 -> -Cos[x1],
        {x1, 0, Pi/2}]
```

Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in $\left\{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi], 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Out[∘]= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^2\right)\,d\left(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$

In[∘]:=
```
C1B = Integrate[V2 /. x1 -> ArcCos[-x2],
        {x2, -1, 0}]
```

Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Sin[φ] ρ[φ], −1, 0}.

Out[∘]= $\int_{-1}^{0}\left(3+\mathrm{Cos}[\varphi]^2\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^3\right)\,d\left(\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$

Die Integration entlang C2 ergibt

In[∘]:=
```
C2A = Integrate[V1 /. x2 -> Cos[x1],
        {x1, Pi/2, 0}]
```

Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in $\left\{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi], \frac{\pi}{2}, 0\right\}$.

Out[∘]= $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]^2\right)\,d\left(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$

In[•]:=
```
C2B = Integrate[V2 /. x1 -> ArcCos[x2],
        {x2, 0, 1}]
```

••• Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Sin[φ] ρ[φ], 0, 1}.

Out[•]= $\int_0^1 \left(3 + \text{Cos}[\varphi]^2\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^3\right) \, d\left(\text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right)$

Zur Integration über C3 trägt nur das zweite Integral bei:

In[•]:=
```
C3 = Integrate[V2 /. x1 -> 0,
        {x2, 1, -1}]
```

••• Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Sin[φ] ρ[φ], 1, −1}.

Out[•]= $\int_1^{-1} \left(3 + \text{Cos}[\varphi]^2\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^3\right) \, d\left(\text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right)$

Die Summe ergibt die rechte Seite des Satzes von Green::

In[•]:=
```
RechteSeite = C1A + C1B + C2A + C2B + C3
```

Out[•]=
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\, \text{Cos}[\varphi]\, \rho[\varphi] - 2\, \text{Cos}[\varphi]\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^2\right) d\left(\text{Cos}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right) +$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(2\, \text{Cos}[\varphi]\, \rho[\varphi] - 2\, \text{Cos}[\varphi]\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^2\right) d\left(\text{Cos}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right) +$$
$$\int_{-1}^{0} \left(3 + \text{Cos}[\varphi]^2\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^3\right) d\left(\text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right) +$$
$$\int_{0}^{1} \left(3 + \text{Cos}[\varphi]^2\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^3\right) d\left(\text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right) +$$
$$\int_{1}^{-1} \left(3 + \text{Cos}[\varphi]^2\, \text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]^3\right) d\left(\text{Sin}[\varphi]\, \rho[\varphi]\right)$$

Das stimmt erwartungsgemäß mit der linken Seite überein!

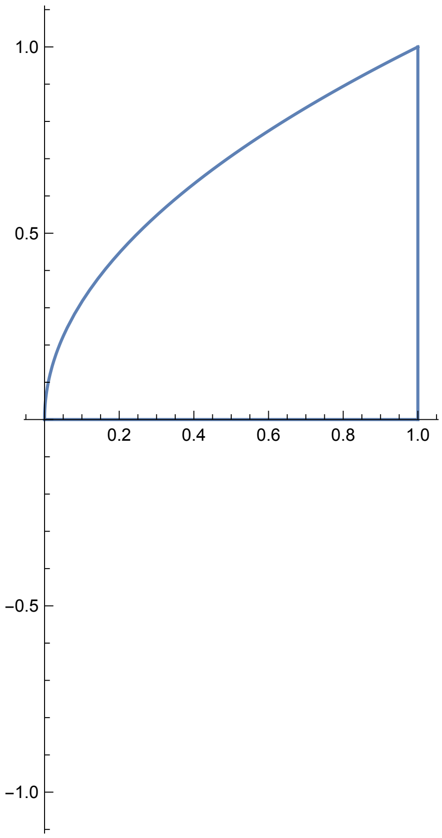
In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

(b)

Es geht um folgende in positivem Umlaufsinn durchlaufene, geschlossene Kurve C (Teilstücke C1, C2, C3):

In[•]:=
```
C1 = ParametricPlot[{x1, 0}, {x1, 0, 1}, DisplayFunction -> Identity];
C2 = ParametricPlot[{1, x2}, {x2, 0, 1}, DisplayFunction -> Identity];
C3 = ParametricPlot[{x1, Sqrt[x1]}, {x1, 1, 0}, DisplayFunction -> Identity];
Show[C1, C2, C3, DisplayFunction ->
        $DisplayFunction]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
V1 = 2 x₁ + 2;
V2 = x₁ - x₂;
```

Die linke Seite des Satz von Green ist das Flächenintegral über

In[•]:=
```
Integrand = D[V2, x₁] - D[V1, x₂]
```

… General: Cos[φ] ρ[φ] is not a valid variable.

… General: Sin[φ] ρ[φ] is not a valid variable.

Out[•]= $-\partial_{\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(2+2\,\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)+\partial_{\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$

In[•]:=
```
LinkeSeite = Integrate[Integrate[Integrand, {x₂, 0, Sqrt[x₁]}], {x₁, 0, 1}]
```

… Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in $\left\{\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi], 0, \sqrt{\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\right\}$.

… Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Cos[φ] ρ[φ], 0, 1}.

Out[•]= $$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}}\left(-\partial_{\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(2+2\,\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)+\partial_{\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\left(\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]-\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)\right)d\left(\text{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)\right)d\left(\text{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]\right)$$

Die rechte Seite ist ein aus drei Teilen (C1, C2, C3) bestehendes Linienintegral der Form

$$\int_C \mathrm{d}x_1\, V1\,(x_1,\, x_2\,(x_1)) + \int_C \mathrm{d}x_2\, V2\,(x_1\,(x_2),\, x_2)$$

Die Integration entlang C1 ergibt nur beim 1. Integral einen Beitrag (x_2 ändert sich ja nicht):

In[•]:= `C1 = Integrate[V1 /. x₂ -> 0, {x₁, 0, 1}]`

••• Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Cos[φ] ρ[φ], 0, 1}.

Out[•]= $\int_0^1 (2 + 2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi])\,\mathrm{d}(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi])$

Die Integration entlang C2 ergibt nur beim 2. Integral einen Beitrag

In[•]:= `C2 = Integrate[V2 /. x₁ -> 1, {x₂, 0, 1}]`

••• Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Sin[φ] ρ[φ], 0, 1}.

Out[•]= $\int_0^1 (1 - \mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi])\,\mathrm{d}(\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi])$

Zur Integration über C3 tragen beide Integral bei. Wir wollen $x_1$als Kurvenparameter nehmen, und daher $x_2 = \sqrt{x_1}$ und $\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_1 / (2\sqrt{x_1})$.

In[•]:= `Integrand = (V1 /. x₂ -> √x₁) + (V2 /. x₂ -> √x₁) / (2 √x₁)`

Out[•]= $2 + 2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi] + \frac{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi] - \sqrt{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}}{2\sqrt{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}}$

In[•]:= `Integrand = Simplify[Integrand]`

Out[•]= $\frac{1}{2}\left(3 + 4\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi] + \sqrt{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\right)$

In[•]:= `C3 = Integrate[Integrand, {x₁, 1, 0}]`

••• Integrate: Invalid integration variable or limit(s) in {Cos[φ] ρ[φ], 1, 0}.

Out[•]= $\int_1^0 \frac{1}{2}\left(3 + 4\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi] + \sqrt{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\right)\mathrm{d}(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi])$

Die Summe ergibt die rechte Seite des Satzes von Green::

In[•]:= `RechteSeite = C1 + C2 + C3`

Out[•]= $\int_0^1 (2 + 2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi])\,\mathrm{d}(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]) + \int_0^1 (1 - \mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi])\,\mathrm{d}(\mathrm{Sin}[\varphi]\,\rho[\varphi]) + \int_1^0 \frac{1}{2}\left(3 + 4\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi] + \sqrt{\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi]}\right)\mathrm{d}(\mathrm{Cos}[\varphi]\,\rho[\varphi])$

Das stimmt erwartungsgemäß mit der linken Seite überein!

In[•]:= `ClearAll["Global`*"];`

In[•]:= `ClearAll["Global`*"];`

9.5

Wie groß ist der Inhalt der durch die x_1-Achse und die Kurve

$$C:\ x_1 = a\,(\varphi - \sin\varphi),$$
$$x_2 = a\,(1 - \cos\varphi),$$

$(a > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

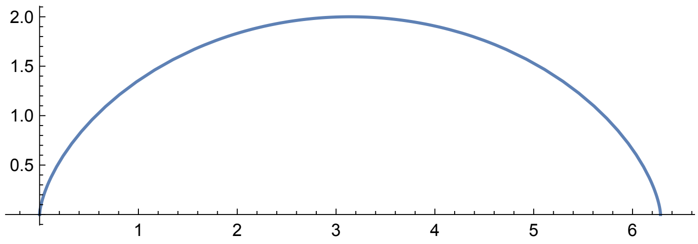
eingeschlossenen Fläche?

Lösungsweg

Die Kurve hat folgendes Aussehen (Beispiel: a=1):

In[•]:=
```
ParametricPlot[{phi - Sin[phi],
        1 - Cos[phi]}, {phi, 0, 2 Pi}]
```

Out[•]=



Freundlicherweise ist die Begrenzungskurve hier schon in Parameterdarstellung gegeben. Daher liegt es nahe, diese Fläche mit Hilfe des Satzes von Green (9.19) in der Anwendung nach (9.23) zu bestimmen.

Es gilt

$$A = \frac{1}{2} \int_C (-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2)$$

Die Begrenzungskurve hat zwei Teilstücke,
die wir B und C nennen. B ist das Stück entlang der x_1 - Achse.

Wegen $x_2 = 0$ verschwindet das erste Teilintegral, da sich entlang der x_1 – Achse aber x_2 nicht ändert $(dx_2 = 0)$, verschwindet auch das zweite Teilintegral. Es bleibt also nur die Integration entlang C.

In[•]:=
```
x1 =  a (φ - Sin[φ]);
x2 =  a (1 - Cos[φ]);
```

Weiters ist

$dx_1 = a\,(1 - \mathrm{Cos}[\varphi])$;
$dx_2 = a\,\mathrm{Sin}[\varphi]$;

und der Integrand ergibt sich daher zu

In[•]:=
```
Integrand = Simplify[-a (1 - Cos[φ]) ×
        a (1 - Cos[φ]) + a (φ - Sin[φ]) a Sin[φ]]
```

Out[•]= $a^2\,(-2 + 2\,\mathrm{Cos}[\varphi] + \varphi\,\mathrm{Sin}[\varphi])$

Das Integral ist also

In[•]:=
```
A = (1/2) Integrate[Integrand, {φ, 0, 2 π}]
```

Out[•]= $-3\,a^2\,\pi$

Dieses Ergebnis ist negativ, da wir vergessen haben, die Richtung der φ-Integration entsprechend einem positiven Umlaufsinn (gegen den Uhrzeiger) zu wählen. Die Fläche ist also $3\,a^2\,\pi$.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.6

Verifizieren Sie den Integralsatz von Stokes für

(a)

$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (4\, x_2, -4\, x_1, 3);$

die Fläche S begrenzt eine beliebig dicke, kreisförmige Scheibe vom Radius R bei x_3=1 (Randkurve).

(b)

$\mathbf{F} = \left(x_1^3 + x_2\, x_3^2 / 2,\; x_1\, x_3^2 / 2 + x_2^2,\; x_1\, x_2\, x_3\right);$

die Fläche ist die offene Halbkugel x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, $x_3 \geq 0$.

(c)

$\mathbf{F} = (e^{x_1},\; 2\, x_2,\; -1);$

die Kurve C ist die Schnittkurve der Kugelfläche x_1^2+x_2^2+x_3^2= 4 mit den Koordinatenebenen im ersten Oktanten.

Lösungsweg

Nach dem Satz von Stokes ist das Flächenintegral über rot F gleich dem Linienintegral über den Rand der Fläche:

$$\int_{S(C)} dA\, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{rot}\, \mathbf{F}) = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{F}$$

Da wir hier mehrmals den Rotor berechnen, laden wir das entsprechende Mathematica Paket:

In[•]:=
```
Needs["VectorAnalysis`"];
```

In[•]:=
```
SetCoordinates[Cartesian[x1, x2, x3]];
```

(a)

In[•]:=
```
Fvec = {4 x2, -4 x1, 3};
```

In[•]:=
```
RotFvec = Curl[Fvec]
```

Out[•]=
```
{0, 0, -8}
```

Die Fläche kann man sich als Oberfläche einer scheibenförmigen Wanne vorstellen; sie besteht aus zwei Teilstücken: dem Rand in Form eines Zylindermantels und der kreisförmigen Unterteil.

(a1) Integral über den Rotor

Der Flächennormalenvektor für den Zylindermantel zeigt immer in eine Richtung parallel zur (x1,x2)-Ebene. Sein Skalarprodukt mit dem Rotor verschwindet daher in unserem Fall.

Der Normalenvektor der kreisförmigen Unterseite zeigt nach unten und ist (0,0,-1); der Integrand ist damit (0,0,-1).(0,0,-8)=8 und das Integral ergibt also $8\,R^2\,\pi$.

(a2) Integral über den Flächenrand

Der Flächenrand ist ein Kreis bei x_3 =, paralell zur
(x1, x2) - Ebene mit Radius R.

Wir parametrisieren die Randkurve mit Zylinderkoordinaten:

In[∘]:=
```
rvec = {R Cos[phi], R Sin[phi], 1};
```

In diesen Koordinaten ist F auf der Randkurve:

In[∘]:=
```
Fvec = (Fvec /. {x1 -> R Cos[phi], x2 -> R Sin[phi], x3 -> 1})
```

Out[∘]=
```
{4 R Sin[phi], -4 R Cos[phi], 3}
```

Weiters ist

In[∘]:=
```
drvec = D[rvec, phi] dphi
```

Out[∘]=
```
{-dphi R Sin[phi], dphi R Cos[phi], 0}
```

Der Integrand ergibt sich zu

In[∘]:=
```
Simplify[Fvec.drvec]
```

Out[∘]= $-4\,\mathrm{dphi}\,R^2$

Bei der Integration muss man den Umlaufsinn beachten. Da die Außenseite der Fläche in unserer Wahl nach unten zeigt, muß der Umlaufsinn umgekehrt werden, also über 0≤ -phi ≤2π. Man erhält als Ergebnis $8 R^2 \pi$, wie bei der Integration über den Rotor.

(b)

In[∘]:=
```
Fvec = {x1^3 + x2 x3^2/2,
        x1 x3^2/2 + x2^2, x1 x2 x3};
```

In[∘]:=
```
RotFvec = Curl[Fvec]
```

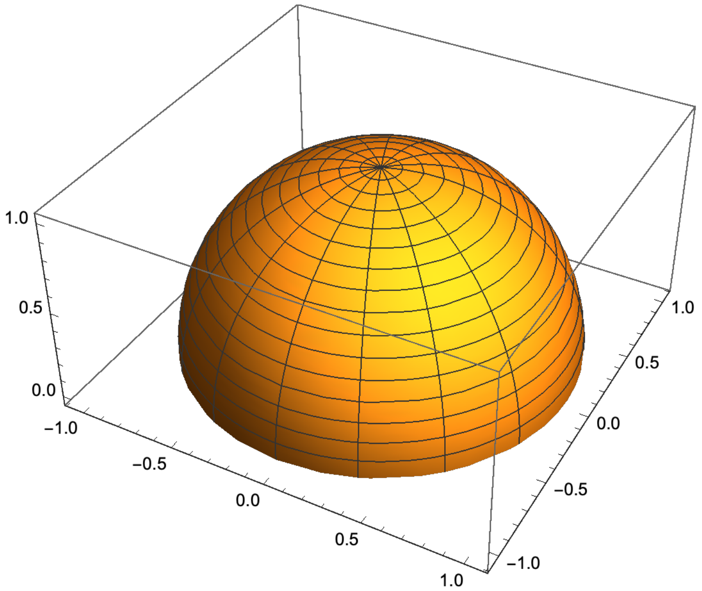
Out[∘]=
```
{0, 0, 0}
```

Der Rotor verschwindet, es scheint sich hier um eine so genannte konservative Kraft zu handeln!

Die Fläche hat die Form

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{Cos[phi] Sin[theta],
        Sin[phi] Sin[theta], Cos[theta]},
    {theta, 0, Pi/2}, {phi, 0, 2 Pi}]
```

Out[∘]=



Die linke Seite des Satzes von Stokes (das Integral über den Rotor) verschwindet. Wir betrachten nun das Linienintegral über den kreisförmigen Rand.

In[∘]:=
```
Rvec = {Cos[phi], Sin[phi], 0};
nvec = D[Rvec, phi]
```

Out[∘]= {-Sin[phi], Cos[phi], 0}

In[∘]:=
```
Fvec = Simplify[Fvec /. {x1 -> Cos[phi], x2 -> Sin[phi],
                x3 -> 0}]
```

Out[∘]= $\{\text{Cos[phi]}^3, \text{Sin[phi]}^2, 0\}$

In[∘]:=
```
Integrand = Simplify[ nvec.Fvec ]
```

Out[∘]= $\text{Cos[phi] Sin[phi]} \left(-\text{Cos[phi]}^2 + \text{Sin[phi]}\right)$

Zur Integration substituiert man u=Sin[phi], du=Cos[phi] d phi und kann damit das Integral als

$\int$du u (- (1 - u^2) + u) = -u^2 / 2 + u^4 / 4 + u^3 / 3

lösen. An den Grenzen verschwindet u und daher auch das Integral!Das Linienintegral ergibt also

In[∘]:=
```
Integrate[Integrand, {phi, 0, 2 Pi}]
```

Out[∘]= 0

und das entspricht genau der linken Seite des Satzes von Stokes.

(c)

In[∘]:=
```
Fvec = {E^x1, 2 x2, -1};
```

In[∘]:=
```
RotFvec = Curl[Fvec]
```

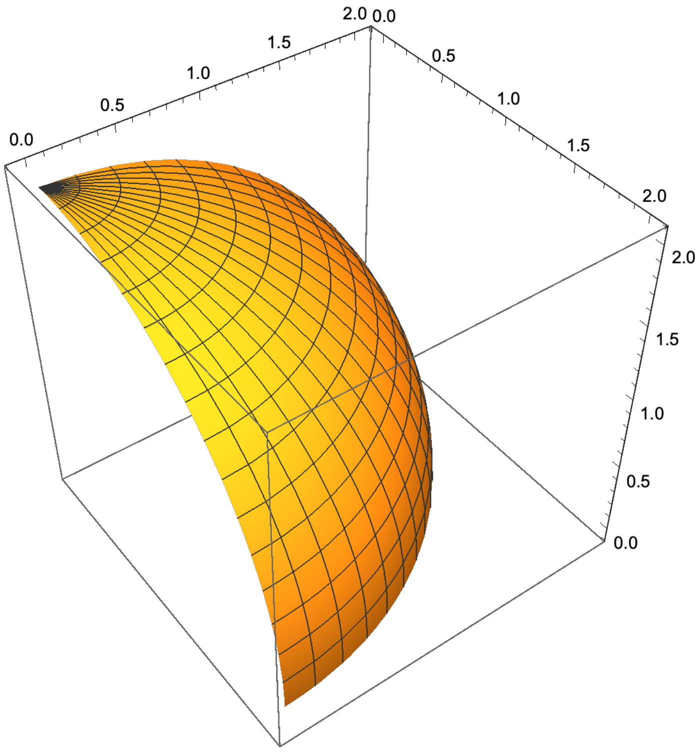
Out[∘]= {0, 0, 0}

Der Rotor verschwindet, es handelt sich um eine konservative Kraft.

Die Fläche hat die Form einer Achtel-Kugeloberfläche:

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{2 Cos[phi] Sin[theta],
        2 Sin[phi] Sin[theta], 2 Cos[theta]},
    {theta, 0, Pi/2}, {phi, 0, Pi/2},
    ViewPoint -> {1.990, -1.464, 2.312}]
```

Out[∘]=



Die linke Seite des Satzes von Stokes (das Integral über den Rotor) verschwindet. Wir betrachten nun das Linienintegral über die drei Teile der Randkurve. Es sind das jeweils Viertelkreise. Die Richtung wählen wir so, dass eine fortlaufende Kurve entsteht.

x1-x2 - Ebene:

In[∘]:=
```
Rvec = {2 Cos[phi], 2 Sin[phi], 0};
nvec = {-Sin[phi], Cos[phi], 0};
```

In[∘]:=
```
Fvecnew = Simplify[Fvec /. {x1 -> 2 Cos[phi], x2 -> 2 Sin[phi],
                    x3 -> 0}]
```

Out[∘]= $\{e^{2\,\mathrm{Cos}[phi]},\ 4\,\mathrm{Sin}[phi],\ -1\}$

In[∘]:=
```
Integrand = Simplify[ nvec.Fvecnew]
```

Out[∘]= $\left(-e^{2\,\mathrm{Cos}[phi]} + 4\,\mathrm{Cos}[phi]\right)\,\mathrm{Sin}[phi]$

Zur Integration substituiert man am besten u=Cos[phi]. Wir integrieren von (x1,x2)=(1,0) bis (0,1):

In[∘]:=
```
C12 = Integrate[Integrand, {phi, 0, Pi/2}]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}\left(5 - e^2\right)$

x2-x3-Ebene:

In[∘]:=
```
Rvec = {0, 2 Cos[phi], 2 Sin[phi]};
nvec = {0, -Sin[phi], Cos[phi]};
```

In[∘]:=
```
Fvecnew = Simplify[Fvec /. {x2 -> 2 Cos[phi], x3 -> 2 Sin[phi],
                    x1 -> 0}]
```

Out[∘]= {1, 4 Cos[phi], -1}

In[∘]:=
```
Integrand = Simplify[ nvec.Fvecnew ]
```

Out[∘]= -Cos[phi] (1 + 4 Sin[phi])

Zur Integral substituiert man am besten u=Cos[phi]. Wir integrieren von (x2,x3)=(1,0) bis (0,1):

In[∘]:=
```
C23 = Integrate[Integrand, {phi, 0, Pi / 2}]
```

Out[∘]= -3

x1-x3-Ebene:

In[∘]:=
```
Rvec = {2 Cos[phi], 0, 2 Sin[phi]};
nvec = {-Sin[phi], 0, Cos[phi]};
```

In[∘]:=
```
Fvecnew = Simplify[Fvec /. {x1 -> 2 Cos[phi], x3 -> 2 Sin[phi],
                    x2 -> 0}]
```

Out[∘]= $\{e^{2\,\mathrm{Cos}[\mathrm{phi}]}, 0, -1\}$

In[∘]:=
```
Integrand = Simplify[ nvec.Fvecnew ]
```

Out[∘]= $-\mathrm{Cos}[\mathrm{phi}] - e^{2\,\mathrm{Cos}[\mathrm{phi}]}\,\mathrm{Sin}[\mathrm{phi}]$

Zur Integral substituiert man am besten u=Cos[phi]. Wir integrieren von (x1,x3)=(0,1) bis (1,0):

In[∘]:=
```
C31 = Integrate[Integrand, {phi, Pi / 2, 0}]
```

Out[∘]= $\frac{1}{2}\left(1 + e^2\right)$

Die Summe dieser drei Beiträge ist

In[∘]:=
```
Expand[C12 + C23 + C31]
```

Out[∘]= 0

und das bestätigt den Stokesschen Satz.

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.7

C sei eine einfach geschlossene, ebene Kurve im Raum. Der Normalvektor auf die Ebene hat die Form

$\mathbf{n} = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3.$

Zeigen Sie, dass die von C eingeschlossene Fläche durch

$\frac{1}{2}\oint_C [\,(b\,x_3 - c\,x_2)\,dx_1 + (c\,x_1 - a\,x_3)\,dx_2$

$+ (a\,x_2 - b\,x_1)\, dx_3\,]$

gegeben ist.

Lösungsweg

Zur Lösung dieser Aufgabe schreiben wir das Integral in der Form

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$

mit

```
In[•]:= F = {b x3 - c x2, c x1 - a x3, a x2 - b x1} / 2;
```

Nach dem Satz von Stokes ist dieses Integral gleich dem Flächenintegral über(n·rot F). Wir berechnen den Rotor zu

```
In[•]:= Needs["VectorAnalysis`"];
```

```
In[•]:= RotF = Curl[F]
Out[•]= {a, b, c}
```

Das ist identisch mit dem Normalenvektor, das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor ist daher einfach dessen Längenquadrat, also 1. Das Flächenintegral liefert also einfach die Fläche.

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

9.8

Berechnen Sie (mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes)

$$\left(\int\!\!\int\right)_B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}\ ,$$

wobei $\mathbf{F} = (x_1\, x_2, x_2\, x_3 + x_1^2,\ x_1\, x_2^2)$ und B die Begrenzungsfläche des Bereiches $x_1^2 + x_2^2 \leq 2\, x_3, 0 \leq x_3 \leq 1$ ist.

Lösungsweg

```
In[•]:= Fvec = {x1 x2, x2 x3 + x1^2, x1 x2^2};
```

Wie sieht die Fläche aus?

```
In[•]:= ParametricPlot3D[{Sqrt[2 z] Cos[phi],
          Sqrt[2 z] Sin[phi], z}, {phi, 0, 2 Pi}, {z, 0, 1}];
```

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist das Volumenintegral über die Divergenz identisch dem Oberflächenintegral über die gesamte Oberfläche des Gebiets. Nur ein Teil dieser Oberflächenintegration (über den gekrümmten Teil der Oberfläche) ist gesucht.

Wir diskutieren zuerst das Oberflächenintegral bei x3=1.

```
In[•]:= nvec = {0, 0, 1};
        Fvec.nvec /. {x3 -> 1}
Out[•]= x1 x2^2
```

Das Integral über die viertelkreisförmige Deckfläche ist in Polarkoordinaten am einfachsten:

In[•]:=
```
Integrand = Fvec.nvec /.
       {x3 -> 1, x1 -> r Cos[phi],
          x2 -> r Sin[phi]}
```

Out[•]= r^3 Cos[phi] Sin[phi]^2

Das Flächenelement ist r dr dphi, damit wird

In[•]:=
```
Teilfläche = Integrate[r Integrand,
       {r, 0, Sqrt[2]}, {phi, 0, 2 Pi}]
```

Out[•]= 0

Damit muss das Integral über den gekrümmten Teil der Oberfläche mit dem Volumenintegral über die Divergenz übereinstimmen. Wir berechnen nun das Volumenintegral über die Divergenz.

In[•]:=
```
DivFvec = D[Fvec[[1]], x1] + D[Fvec[[2]], x2]
          + D[Fvec[[3]], x3]
```

Out[•]= x2 + x3

Out[•]= 0

Das Volumenintegral wird am besten in Zylinderkoordinaten ausgeführt. Das Integrationsdifferenzial ist dann (r dr dphi dz) und die Grenzen sind:

$0 \le x_3 \le 1$

$0 \le r \le \sqrt{2\, x_3}$

$0 \le \varphi \le 2\,\pi$

In[•]:=
```
Integrand = DivFvec /. {x1 -> r Cos[phi],
          x2 -> r Sin[phi]}
```

Out[•]= x3 + r Sin[phi]

In[•]:=
```
Ergebnis = Integrate[Integrate[r Integrand,
          {r, 0, Sqrt[2 x3]}], {phi, 0, 2 Pi},
       {x3, 0, 1}]
```

Out[•]= $\dfrac{2\,\pi}{3}$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.9

Die Oberfläche eines Ellipsoids ist durch

$x_1 = a \cos v\ \cos w\,,$

$x_2 = b\ \sin v\ \cos w,$

$x_3 = c \sin w$

gegeben. Man betrachte die geschlossene Fläche, die durch $x_1 = 0$, x_2=0, x_3=0 und den Teil des Ellipsoids mit x_i≥ 0 gegeben ist. Berechnen Sie für diese Fläche

(a) $\int\int_B d\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{F}$

mit **F** = $\left(x_1^2, x_2^2, x_3^2\right)$,

(b) $\iiint dV\ (x_1 + x_2 + x_3)$

V = (das von der Fläche umrandete Volumen).

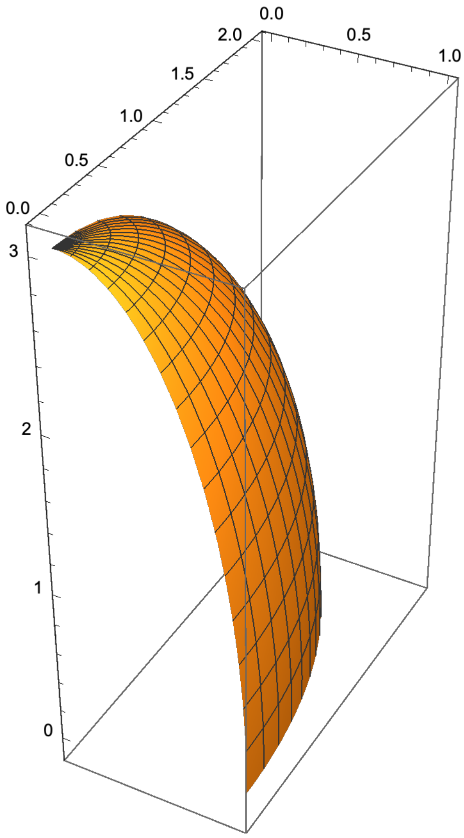
Lösungsweg

Die Oberfläche ist (z.B. für a=1, b=2, c=3)

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{Cos[v] Cos[w], 2 Sin[v] Cos[w], 3 Sin[w]},
 {v, 0, Pi/2}, {w, 0, Pi/2}]
```

Out[∘]=



(a)

Das Oberflächenintegral kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Volumenintegral über **div F** umgeformt werden:

In[∘]:=
```
Fvec = {x1^2, x2^2, x3^2};
DivFvec = D[Fvec[[1]], x1] + D[Fvec[[2]], x2] + D[Fvec[[3]], x3]
```

Out[∘]= 2 x1 + 2 x2 + 2 x3

Man muss also das Volumenintegral

$$2 \iiint dV\ (x_1 + x_2 + x_3)$$

berechnen. Das entspricht Aufgabe (b).

Allerdings führt das zu einer recht umfangreichen Integration. Wir berechnen hier also wirklich das Flächenintegral. Die drei Beiträge von den in den drei Hauptebenen liegenden Teilstücken verschwinden, da dort jeweils die Flächennormale orthogonal zu F ist, wie zum Beispiel in der x1-x2-Ebene:

```
In[•]:= nvec = {-1, 0, 0}
        Fvec /. {x1 -> 0}
        nvec.(Fvec /. {x1 -> 0})
Out[•]= {-1, 0, 0}
Out[•]= {0, x2^2, x3^2}
Out[•]= 0
```

Es bleibt also nur die Flächenintegration über den gekrümmten Teil. Der Normalenvektor ist durch das äußere Produkt zweier Tangentenvektoren gegeben:

```
In[•]:= rvec = {a Cos[v] Cos[w], b Sin[v] Cos[w], c Sin[w]};
        rtanv = D[rvec, v]
        rtanw = D[rvec, w]
Out[•]= {-a Cos[w] Sin[v], b Cos[v] Cos[w], 0}
Out[•]= {-a Cos[v] Sin[w], -b Sin[v] Sin[w], c Cos[w]}
```

```
In[•]:= Avec = Cross[rtanv, rtanw]
Out[•]= {b c Cos[v] Cos[w]^2, a c Cos[w]^2 Sin[v],
          a b Cos[v]^2 Cos[w] Sin[w] + a b Cos[w] Sin[v]^2 Sin[w]}
```

Der Vektor F auf der Oberfläche ist

```
In[•]:= FvecOb = Fvec /. {x1 -> a Cos[v] Cos[w], x2 -> b Sin[v] Cos[w], x3 -> c Sin[w]}
Out[•]= {a^2 Cos[v]^2 Cos[w]^2, b^2 Cos[w]^2 Sin[v]^2, c^2 Sin[w]^2}
```

Der Integrand ist also

```
In[•]:= Integrand = Simplify[FvecOb.Avec]
Out[•]= a b c Cos[w]
          (a Cos[v]^3 Cos[w]^3 + c Cos[v]^2 Sin[w]^3 + Sin[v]^2 (b Cos[w]^3 Sin[v] + c Sin[w]^3))
```

Die Integration faktorisiert in Produkte von Integralen und ist daher relativ einfach auszuführen. Man erhält schließlich

```
In[•]:= Ergebnis = Integrate[Integrand, {v, 0, Pi/2}, {w, 0, Pi/2}]
```

Out[•]= $\frac{1}{8}\, a\, b\, c\, (a + b + c)\, \pi$

(b)

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"];
```

Dieses Integral ist ein Integral über

$$(1/2)\ \mathbf{div}\,F \text{ mit } F = (x_1^2, x_2^2, x_3^2),$$

entsprechend Aufgabe (a). Man könnte es nach dem Satz von Gauß also durch ein Oberflächenintegral entsprechend (a) ausdrücken und die Rechnung ist dann etwas einfacher. Wir wollen hier dennoch auch die Volumenintegration durchführen.

Wir wählen dazu etwas modifizierte sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten), welche die Integration vereinfachen. (Versuchen Sie es einmal mit einfachen Kugelkoordinaten!) Es ist

```
In[∘]:= x1 = a r Cos[phi] Sin[theta];
        x2 = b r Sin[phi] Sin[theta];
        x3 = c r Cos[theta];
```

Das Integrationsdifferenzial ist dann dV= $a\,b\,c\,r^2$sin(theta) dr d theta d phi . Man sieht das einfach durch Ausrechnen der Jacobideterminante, die sich nur durch den Faktor abc von jener für Kugelkoordinaten unterscheidet. Der Integrand lautet nun

```
In[∘]:= Integrand = Expand[Simplify[a b c r^2 Sin[theta] (x1 + x2 + x3)]]
```

Out[∘]= $a\,b\,c^2\,r^3\,\mathrm{Cos}[\mathrm{theta}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}] + a^2\,b\,c\,r^3\,\mathrm{Cos}[\mathrm{phi}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}]^2 + a\,b^2\,c\,r^3\,\mathrm{Sin}[\mathrm{phi}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}]^2$

Der Integrand zerfällt in den r-abhängigen Teil und den Restteil:

```
In[∘]:= Restteil = Coefficient[Integrand, r^3]
```

Out[∘]= $a\,b\,c^2\,\mathrm{Cos}[\mathrm{theta}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}] + a^2\,b\,c\,\mathrm{Cos}[\mathrm{phi}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}]^2 + a\,b^2\,c\,\mathrm{Sin}[\mathrm{phi}]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{theta}]^2$

Die Oberfläche des Ellipsoids liegt bei $r = 1$(diese einfache Form war der Grund für die Wahl der Koordinaten).

Die Integrationsgrenzen sind:

$0 < \mathrm{theta} < \pi / 2$

$0 < \mathrm{phi} < \pi / 2$

$0 < r < 1$

Der r-abhängige Anteil des Integranden ist r^3 und ergibt nach Integration 1/4. Damit müssen wir nun über folgenden Integranden integrieren:

```
In[∘]:= Ergebnis = Integrate[Restteil / 4,
            {phi, 0, Pi / 2}, {theta, 0, Pi / 2}]
```

Out[∘]= $\frac{1}{16}\,a\,b\,c\,(a + b + c)\,\pi$

```
In[∘]:= Simplify[Ergebnis ]
```

Out[∘]= $\frac{1}{16}\,a\,b\,c\,(a + b + c)\,\pi$

Das ist genau die Hälfte des Ergebnisses (a), wie wir es erwartet haben.

```
In[∘]:= ClearAll["Global`*"];
```

9.10

Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für

(a) $\mathbf{F} = (2, -1, 4)$

und den Volumenbereich :

$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 3,\ 0 \le x_3 \le 2.$

(b) $\mathbf{F} = (x_2, -2, x_1)$

und den Volumenbereich :

$|x_1| \le 2,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1.$

(c) $\mathbf{F} = (x_3, x_1, -3 x_2^2 x_3)$

und den Bereich von $x_1^2 + x_2^2 = 9$,

$x_3 = 4$ im 1. Oktanten.

Lösungsweg

In[∘]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

(a)

Da **F** konstant ist, verschwindet die Divergenz und damit das Volumenintegral. Auch das Oberflächenintegral verschwindet, da die Normalenvektoren gegenüberliegender Rechtecksflächen entgegengesetzte Richtung haben und daher **F·n** sich jeweils aufhebt.

(b)

In[∘]:=
```
Fvec = {x2, -2, x1};
DivFvec = D[Fvec[[1]], x1] + D[Fvec[[2]], x2] + D[Fvec[[3]], x3]
```

Out[∘]= 0

Damit verschwindet natürlich das Volumenintegral. Die Oberfläche des Kubus setzt sich aus 6 Rechtecken zusammen:

(A1) x1=-2:

In[∘]:=
```
nvec = {-1, 0, 0};
Integrand = Fvec . nvec /. x1 -> -2
A1 = Integrate[Integrand, {x2, 0, 1}, {x3, 0, 1}]
```

Out[∘]= $-x2$

Out[∘]= $-\frac{1}{2}$

(A2) x1=2:

In[∘]:=
```
nvec = {1, 0, 0};
Integrand = Fvec . nvec /. x1 -> 2
A2 = Integrate[Integrand, {x2, 0, 1}, {x3, 0, 1}]
```

Out[∘]= $x2$

Out[∘]= $\frac{1}{2}$

(B1) x2=0:

In[∘]:=
```
nvec = {0, -1, 0};
Integrand = Fvec . nvec /. x2 -> 0
B1 = Integrate[Integrand, {x1, -2, 2}, {x3, 0, 1}]
```

Out[∘]= 2

Out[∘]= 8

(B2) x2=1:

```
In[•]:= nvec = {0, 1, 0};
        Integrand = Fvec . nvec /. x2 -> 1
        B2 = Integrate[Integrand, {x1, -2, 2}, {x3, 0, 1}]
Out[•]= -2
Out[•]= -8
```

(C1) x3=0:

```
In[•]:= nvec = {0, 0, -1};
        Integrand = Fvec . nvec /. x3 -> 0
        C1 = Integrate[Integrand, {x1, -2, 2}, {x2, 0, 1}]
Out[•]= -x1
Out[•]= 0
```

(C2) x3=1:

```
In[•]:= nvec = {0, 0, 1};
        Integrand = Fvec . nvec /. x3 -> 1
        C2 = Integrate[Integrand, {x1, -2, 2},
                {x2, 0, 1}]
Out[•]= x1
Out[•]= 0
```

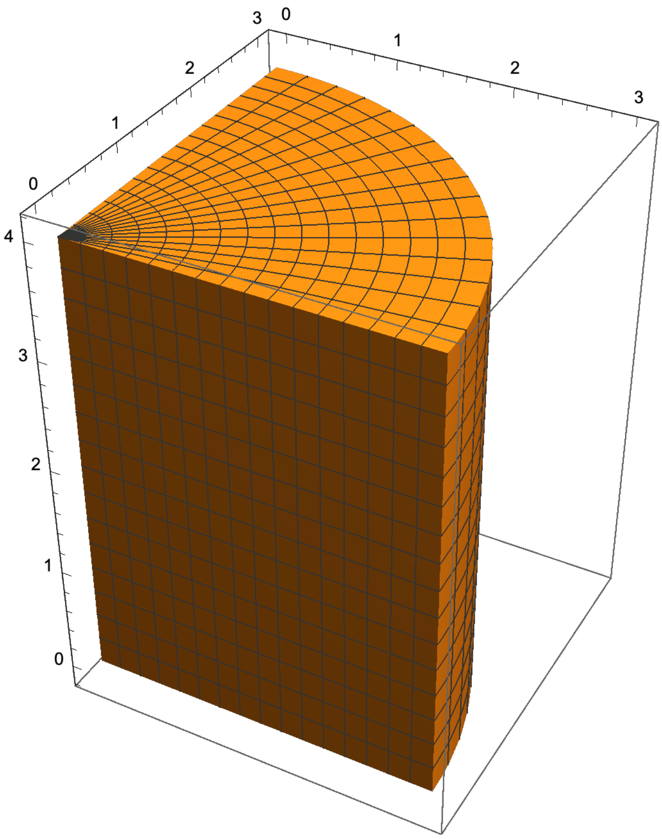
```
In[•]:= Summe = A1 + A2 + B1 + B2 + C1 + C2
Out[•]= 0
```

(c)

Es handelt sich hier um ein Viertel eines Zylinders:

In[•]:=
```
C1Surf = ParametricPlot3D[{3 Cos[phi], 3 Sin[phi], z},
         {phi, 0, Pi/2}, {z, 0, 4},
         DisplayFunction -> Identity];
B1Surf = ParametricPlot3D[{r Cos[phi], r Sin[phi], 4},
         {phi, 0, Pi/2}, {r, 0, 3},
         DisplayFunction -> Identity];
A1Surf = ParametricPlot3D[{x, 0, z},
         {x, 0, 3}, {z, 0, 4},
         DisplayFunction -> Identity];
Show[A1Surf, B1Surf, C1Surf, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
Fvec = {x3, x1, -3 x2^2 x3};
DivFvec = D[Fvec[[1]], x1] + D[Fvec[[2]], x2] + D[Fvec[[3]], x3]
```

Out[•]= $-3\,x2^2$

Das Volumenintegral ergibt

In[•]:=
```
Integrate[Integrate[DivFvec,
         {x1, 0, Sqrt[9 - x2^2]}],
     {x2, 0, 3}, {x3, 0, 4}]
```

Out[•]= $-\frac{243\,\pi}{4}$

Das Oberflächenintegral hat fünf Teile.

(A1) vordere Rechtecksfläche (x2=0)

In[•]:=
```
nvec = {0, -1, 0};
Integrand = Fvec.nvec /. {x2 -> 0}
```
Out[•]= $-x1$

In[•]:=
```
A1 = Integrate[Integrand, {x1, 0, 3},
        {x3, 0, 4}]
```
Out[•]= -18

(A2) linke Rechtecksfläche (x1=0)

In[•]:=
```
nvec = {-1, 0, 0};
Integrand = Fvec.nvec /. { x1 -> 0}
```
Out[•]= $-x3$

In[•]:=
```
A2 = Integrate[Integrand, {x2, 0, 3},
        {x3, 0, 4}]
```
Out[•]= -24

(B1) oberer Viertelkreis (x3=4)

In[•]:=
```
nvec = {0, 0, 1};
Integrand = Fvec.nvec /. { x3 -> 4}
```
Out[•]= $-12\, x2^2$

In[•]:=
```
B1 = Integrate[Integrate[Integrand,
        {x1, 0, Sqrt[9 - x2^2]}], {x2, 0, 3}]
```
Out[•]= $-\frac{243\,\pi}{4}$

(B2) unterer Viertelkreis (x3=0)

In[•]:=
```
nvec = {0, 0, -1};
Integrand = Fvec.nvec /. {x3 -> 0}
```
Out[•]= 0

In[•]:=
```
B2 = Integrate[Integrate[Integrand,
        {x1, 0, Sqrt[9 - x2^2]}], {x2, 0, 3}]
```
Out[•]= 0

(C1) gekrümmter Flächenteil

Dafür verwenden wir Zylinderkoordinaten. (Das Flächenelement ist dann r dr dphi.)

In[•]:=
```
nvec = {Cos[phi], Sin[phi], 0};
Integrand = Fvec.nvec /. {x1 -> 3 Cos[phi], x2 -> 3 Sin[phi]}
```
Out[•]= x3 Cos[phi] + 3 Cos[phi] Sin[phi]

In[•]:=
```
Das
```
Out[•]= Das

In[•]:=
```
C1 = Integrate[3 Integrand,
        {phi, 0, Pi / 2}, {x3, 0, 4}]
```

Out[•]= 42

In[•]:=
```
Summe = A1 + A2 + B1 + B2 + C1
```

Out[•]= $-\frac{243\,\pi}{4}$

Die Summe stimmt also mit dem Volumenintegral überein.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.11

Man bestimme jene Fläche, die von der Kurve $x_1^3 + x_2^3 = 9\, x_1\, x_2$ im Bereich $x_1, x_2 \geq 0$ umschlossen wird.
(Hinweis: Setzen Sie $x_2 = x_1$ t, und verwenden Sie (9.23)).

Lösungsweg

Der Greensche Satz (in der Ebene) kann entsprechend (9.23) zur Flächenberechnung verwendet werden:

$$A = \frac{1}{2} \oint (-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \;.$$

Wie sieht die Kurve in der Ebene aus? Dazu setzen wir x2=x1 t und finden

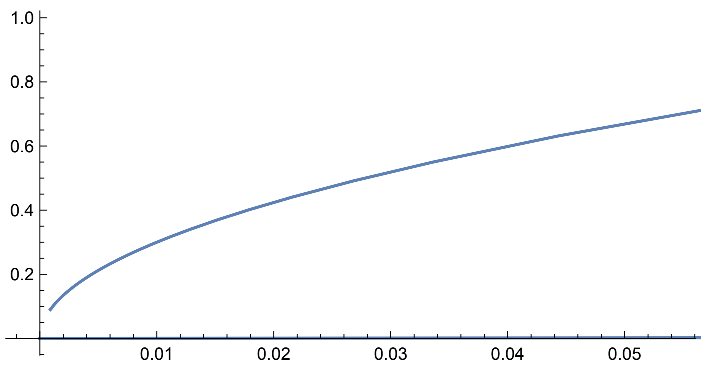
$$x_1^3 \left(1 + t^3\right) = 9\, t\, x_1^2 \longrightarrow x_1 = 9\, t \big/ \left(1 + t^3\right) \text{ oder } x_1 = 0$$

Damit finden wir die Parameterdarstellung :

In[•]:=
```
x1=9 t/(1 + t^3);
x2=t x1 =9 t^2/(1 + t^3);
```

Die Kurve beginnt bei t=0 im Ursprung und kehrt für t→∞ dorthin zurück:

In[•]:=
```
ParametricPlot[{9 t / (1 + t³), 9 t² / (1 + t³)},
    {t, 0, 100}, AspectRatio → 0.5]
```

Out[•]=


In[•]:= Wir finden entlang der Kurve daher

In[•]:=
```
dx1 = D[x1, t] dt
```

Out[•]= 0

In[•]:=
```
dx2 = D[x2, t] dt
```
Out[•]= 0

In[•]:=
```
Simplify[-x2 dx1 + x1 dx2]
```
Out[•]= 0

Mit der Substitution u=1+t^3 und du=3 t^2 dt ergibt sich das Integral

$$A = (1/2) \int_{u=1}^{\infty} du\, 27/u^2 = 27/2.$$

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.12

Zeigen Sie, dass für die Kurvendarstellung $\rho=\rho(\varphi)$ (ebene Polarkoordinaten) das Integral

$$\frac{1}{2} \oint d\varphi\, \rho^2(\varphi)$$

die von der Kurve umschlossene Fläche liefert.

Lösungsweg

Nach dem Greenschen Satz in der Form (9.23) ist die von einer einfachen geschlossenen Kurve umgebene Fläche gleich

$$A = \frac{1}{2} \oint (-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2)$$

Wenn die Kurve in Parameterform $\{x_1(t), x_2(t)\}$ gegeben ist, dann wird dieses Integral

$$A = \frac{1}{2} \oint (-x_2\, \dot{x}_1 + x_1\, \dot{x}_2)\, dt$$

In unserer Aufgabenstellung ist das der Fall; die Kurve ist durch die Parametrisierung

In[•]:=
```
x₁ = ρ[φ] Cos[φ];
x₂ = ρ[φ] Sin[φ];
```

gegeben, der Integrand ist also

In[•]:=
```
Integrand = Simplify[-x₂ D[x₁, φ] + x₁ D[x₂, φ]]
```
Out[•]= $\rho[\varphi]^2$

Damit haben wir die gesuchte Aussage bewiesen.

In[•]:=
```
ClearAll["Global`*"];
```

9.13

Gegeben ist die Kurve

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = a^2 (x_1^2 - x_2^2).$$

Überzeugen Sie sich davon, dass sie in ebenen Polarkoordinaten die Form $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ hat. Wie groß ist die Fläche, die von ihr im Bereich $x_1 \geq 0$ umschlossen wird?

Lösungsweg

Wir schreiben die Kurve in Polarkoordinaten an:

In[•]:=
```
Clear[x1, x2]
```

In[•]:=
```
(x1^2 + x2^2)^2 == a^2 (x1^2 - x2^2) /.
    {x1 -> r Cos[phi], x2 -> r Sin[phi]}
```

Out[•]= $\left(r^2 \text{Cos}[\text{phi}]^2 + r^2 \text{Sin}[\text{phi}]^2\right)^2 == a^2 \left(r^2 \text{Cos}[\text{phi}]^2 - r^2 \text{Sin}[\text{phi}]^2\right)$

In[•]:=
```
Simplify[%]
```

Out[•]= $r^3 == a^2\, r\, \text{Cos}[2\, \text{phi}]$

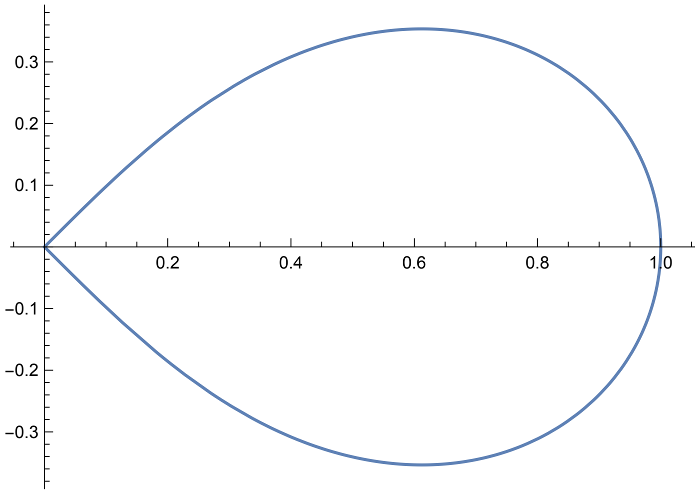
Neben der trivialen Beziehung r=0 erfüllen die Punkte auf der Kurve also auch die Gleichung

$r^2 == a^2\ \text{Cos}[2\, \text{phi}]$

wie wir das auch zeigen sollten. Da der Radius reell sein muss sind nur positive Werte des Kosinus erlaubt, also $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$, $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\,\pi/4$

Wie sieht diese Kurve aus? Ausgedrückt mit Hilfe der Polarkoordinaten ergibt sich (für a=1 und den Zweig $x_1 \geq 0$)

In[•]:=
```
ParametricPlot[Sqrt[Cos[2 phi]] {Cos[phi], Sin[phi]},
    {phi, -Pi/4, Pi/4}]
```

Out[•]=


(Der zweite Zweig ist das Spiegelbild nach links.)

Entsprechen dem Greenschen Satz (in der Form (9.23)) und Aufgabe 9.12 ist die Fläche gleich dem Linienintegral

In[•]:= $A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2\ (\varphi)\ d\varphi$

also

In[•]:=
```
A = (1/2) Integrate[a^2 Cos[2 phi],
              {phi, -Pi/4, Pi/4}]
```

Out[•]= $\frac{a^2}{2}$

Das ist die gesuchte Fläche.

```
In[∘]:= ClearAll["Global`*"];
```

Information zu Koordinatensystemen

In Mathematica kann das Koordinatensystem festgelegt werden, damit man dann den Gradienten (Grad), die Divergenz (Div), den Rotor (Curl) und den Laplace-Operator (Laplacian) berechnen kann.

```
In[∘]:= Needs["VectorAnalysis`"];
```

Man kann dann zum Beispiel folgende Befehle ausführen, um den Rotor eines Vektors zu berechnen:

```
In[∘]:= SetCoordinates[Cartesian[x1, x2, x3]];

In[∘]:= Curl[{x1 x2 , x2 x3 , x1 x3 }]

Out[∘]= {-x2, -x3, -x1}
```

Da dabei der Rechengang natürlicherweise nicht angegeben wird, werden in unseren Lösungsbeschreibungen Rechenschritte und Beispiele, die einfach nur die Berechnung dieser Differenzialoperationen sind, nicht angeben.

```
In[∘]:= ClearAll["Global`*"];
```